2007年度大学入試センター試験　解説〈数学ⅠA〉

第1問

〔1〕

(1)　$x<\dfrac{5}{3}$　すなわち　$3x-5<0$　のとき

$$|3x-5|=-(3x-5)$$

よって

$$2(x-2)^2=-(3x-5)$$
$$2x^2-5x+3=0$$
$$(x-1)(2x-3)=0$$

したがって

$$\underline{\underline{x=1,\ \frac{3}{2}}}$$ ……ア，イウ

（ともに $x<\dfrac{5}{3}$ をみたす）

(2)　$\dfrac{5}{3}\leqq x$　のとき　$|3x-5|=3x-5$

よって

$$2(x-2)^2=3x-5$$
$$2x^2-11x+13=0$$

解の公式より

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-104}}{4}=\frac{11\pm\sqrt{17}}{4}$$

よって(1)の結果と合わせて解は$\underline{\underline{4\text{個}}}$ ……エ

また，$\alpha=\dfrac{1}{4}\left(11+\sqrt{17}\right)$ であり

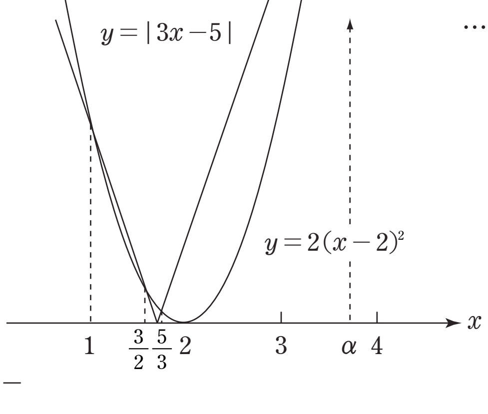
$$\frac{1}{4}(11+4)<\frac{1}{4}\left(11+\sqrt{17}\right)<\frac{1}{4}(11+5)$$

すなわち　$\dfrac{15}{4}<\alpha<4$

よって　$3\leqq\alpha<3+1$ が成り立つから

$$\underline{\underline{m=3}}$$ ……オ

である．



〔2〕

(1)　A の要素は10の倍数(自然数)だから，2で割り切れる．

逆に2で割り切れる数は必ずしも10の倍数ではない．

よって，カは十分条件であるが必要条件ではないから②　……カ

次に，

B の要素は4の倍数であり，20で割り切れるとは限らない．

逆に20で割り切れる数は4で割り切れる．

よって，キは必要条件であるが十分条件ではないから①　……キ

(2)　C は，(10で割り切れる数)かつ(4で割り切れる数)の集合なので

$C = A \cap B$　……④　……ク

また，「10で割り切れるかまたは4で割り切れる」の否定は「10でも4でも割り切れない」であるから D は，

$D = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$　……③　……ケ

E の否定 $\overline{E}$ は20で割り切れる数の集合

また，4と10の最小公倍数が20だから $\overline{E}$ は4でも10でも割り切れる数の集合．

したがって

$\overline{E} = A \cap B$

$\overline{E}$ の否定 $\overline{\overline{E}} = E$ より $E = \overline{A \cap B}$

よって

$E = \overline{A \cap B}$　……⑦　……コ

第2問

(1)　$y = x^2 - 2(a-1)x + 2a^2 - 8a + 4$

$= \{x - (a-1)\}^2 + a^2 - 6a + 3$

の式変形により，頂点の座標は

$(a-1,\ a^2 - 6a + 3)$　……アイウ

である．グラフ G は下に凸の放物線だから，x 軸と異なる2点で交わるのは，頂点の y 座標が負のときである．すなわち

$a^2 - 6a + 3 < 0$

$a^2 - 6a + 3 = 0$　の解は　$a = 3 \pm \sqrt{6}$ なので

$3 - \sqrt{6} < a < 3 + \sqrt{6}$　……②　……エオ

G と x 軸との交点が2つとも負になるのは，次図より，条件②に加えて

G の軸が y 軸より左側にある：$a - 1 < 0$ ……③

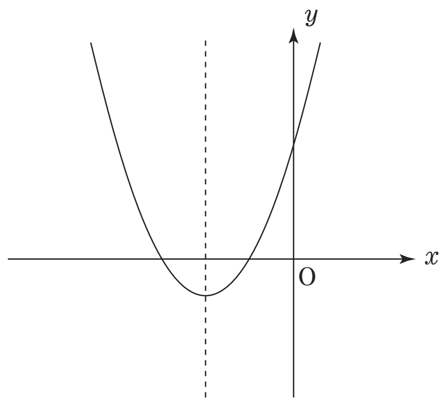
かつ

y 切片が正：$2a^2 - 8a + 4 > 0$　……④

④の解は $a < 2 - \sqrt{2}$，$2 + \sqrt{2} < a$

②③④より，求める範囲は

$3 - \sqrt{6} < a < 2 - \sqrt{2}$　……カキクケ



(2)　$3 \leqq a-1 \leqq 7$ より，a の範囲は

$\underline{\underline{4 \leqq a \leqq 8}}$　……コサ

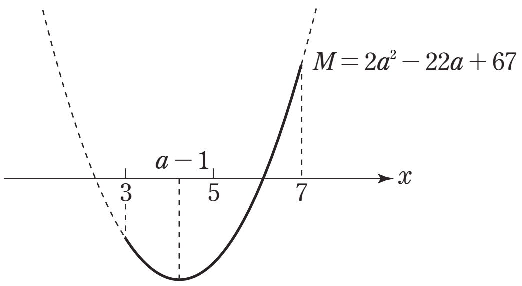
$3 \leqq x \leqq 7$ においては G の軸 $x=a-1$ が含まれるので最大値について，次の(ア)，(イ)の場合を考えると，

（ア）　放物線の軸が次図のような位置にあれば，すなわち $3 \leqq a-1 \leqq 5$ であれば，G は

$x=7$ で最大となる．よって

$\underline{\underline{4 \leqq a \leqq 6}}$ のとき　……シ

$\underline{\underline{M=2a^2-22a+67}}$　……ス〜チ

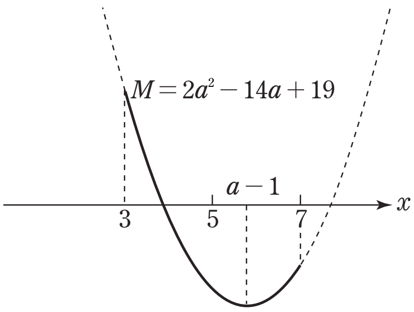


（イ）　放物線の軸が次図のような位置にあれば，すなわち $5 \leqq a-1 \leqq 7$ のときは G は $x=3$ で最大となる．

よって

$6 \leqq a \leqq 8$ のとき

$\underline{\underline{M=2a^2-14a+19}}$　……ツ〜ニ



次に

最小値　$a^2-6a+3=6$　ならば

$$a^2-6a-3=0$$

よって

$$a=3\pm2\sqrt{3}$$

$4\leqq a\leqq8$　より　$a=\underline{\underline{3+2\sqrt{3}}}$　……ヌネノ

$6<3+2\sqrt{3}<8$　であるから，最大値は(イ)の場合を考えて，

$M=2a^2-14a+19$

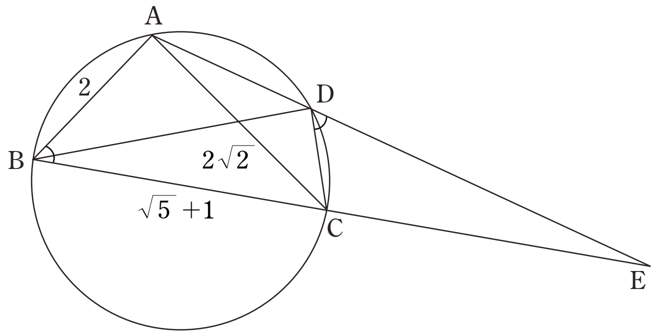
$a^2=6a+3$ を用いて

$$\begin{aligned} M &= 2(6a+3)-14a+19 \\ &= -2a+25 \\ &= -2\left(3+2\sqrt{3}\right)+25 \\ &= \underline{\underline{19-4\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

……ハヒフヘ

である．

第3問



(1)　余弦定理より

$$\cos\angle \mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$

$$=\frac{4+(6+2\sqrt{5})-8}{4(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{5}+1)}{4(\sqrt{5}+1)}=\frac{1}{2}$$

よって，$\angle \mathrm{ABC}=\underline{\underline{60^\circ}}$ ……**アイ**

外接円の半径を R とすれば，正弦定理より

$$\frac{\mathrm{CA}}{\sin\angle \mathrm{ABC}}=2R \quad よって \quad R=2\sqrt{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}$$

$$R=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{6}}}$$ ……**ウエオ**

(2)　円に内接する四角形の性質から

$\angle \mathrm{BAD}+\angle \mathrm{BCD}=\underline{\underline{180^\circ}}$ ……**カキク**

よって，$\sin\angle \mathrm{BAD}=\sin(180^\circ-\angle \mathrm{BCD})$

$=\sin\angle \mathrm{BCD}$

この関係を利用すると

$$\begin{cases} S_1=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle \mathrm{BAD}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\mathrm{AD}\sin\angle \mathrm{BAD} \\ S_2=\dfrac{1}{2}\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle \mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\cdot\mathrm{CD}\sin\angle \mathrm{BAD} \end{cases}$$

これらと①より

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}}=\sqrt{5}-1$$

$$2\mathrm{AD}=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)\mathrm{CD}=4\mathrm{CD}$$

よって

$$\mathrm{CD}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\mathrm{AD}}}$$ ……ケコ

また，$\angle\mathrm{ADC}=120^\circ$ だから

$\mathrm{CD}=x$，$\mathrm{AD}=2x$ とおくと

$$(2\sqrt{2})^2=(2x)^2+x^2-2\cdot 2x^2\cos 120^\circ$$

$$8=4x^2+x^2+2x^2=7x^2 \quad \left(\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2=\frac{8}{7} \quad \text{より} \quad x=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\underline{\underline{\frac{2}{7}\sqrt{14}}}$$ ……サシスセ

次に，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{CDE}=60^\circ$，$\angle\mathrm{E}$ は共通　より

$\triangle\mathrm{ABE}\backsim\triangle\mathrm{CDE}$

相似比は

$$\mathrm{AB}:\mathrm{CD}=2:\frac{2}{7}\sqrt{14}=7:\sqrt{14}$$

したがって面積比は

$$S_3:S_4=7^2:(\sqrt{14})^2=7:2$$

よって，$\dfrac{S_3}{S_4}=\underline{\underline{\dfrac{7}{2}}}$ ……ソタ

ここで，$S_3=7S$ とおくと $S_4=2S$

$S_1+S_2+S_4=S_3$ より

$S_1+S_2=7S-2S=5S$

①より，$S_1=(\sqrt{5}-1)S_2$

よって

$$(\sqrt{5}-1)S_2+S_2=\sqrt{5}S_2=5S \quad \text{より} \quad S_2=\sqrt{5}S$$

したがって，$\dfrac{S_2}{S_4}=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}}$ ……チツ

第4問

(1)　ちょうど1周してAにとまるのは，3回の試行で出た目の数の組が(1，1，4)，(1，2，3)，(2，2，2)となるときである．

(1，1，4)となるのは3通り，(1，2，3)となるのは$3!=6$(通り)，(2，2，2)となるのは1通りである．

よって，$\underline{\underline{10\text{通り}}}$　……アイ

1回もAにとまらないのは，1回投げるごとにA以外に進む5通りずつある．

よって，$5^3=\underline{\underline{125\text{通り}}}$　……ウエオ

(2)　3回ともAにとまるには3回6の目が出ることが必要で，その確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\underline{\underline{\frac{1}{216}}}$$　……カキクケ

3回中，2回Aにとまる確率は毎回Aに進む確率が$\frac{1}{6}$，Aにとまらない確率が$\frac{5}{6}$であるから

$${}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\underline{\underline{\frac{5}{72}}}$$　……コサシ

上と同様にAに1回だけとまる確率は

$${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=\underline{\underline{\frac{25}{72}}}$$　……スセソタ

(3)　Aにとまる回数の期待値は(2)の確率の計算結果から

$$3\times\frac{1}{216}+2\times\frac{5}{72}+1\times\frac{25}{72}$$

$$=\frac{1}{216}(3+30+75)$$

$$=\frac{108}{216}$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$　……チツ

である．