2007年度大学入試センター試験　解説〈数学ⅡB〉

第1問

〔1〕　$\underline{\sin 2x >} \sqrt{2}\,\underline{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}+\dfrac{1}{2}$

(左辺)は2倍角，(右辺)には加法定理を用いて
$\sin x$，$\boxed{\cos x}$ だけの式にしたい!!
$\sin x = a$，$\cos x = b$

を変形して

$$2\sin x\cdot\cos x > \sqrt{2}\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$$

$$2\sin x\cdot\cos x-\cos x+\sin x-\frac{1}{2}>0$$

$$4\sin x\cdot\cos x+2\sin x-2\cos x-1>0\quad\cdots\cdots①$$

$a=\sin x$，$b=\cos x$ とおくと

①より　$\underline{\underline{4ab+2a-2b-1>0}}$　……ア，イ，ウ

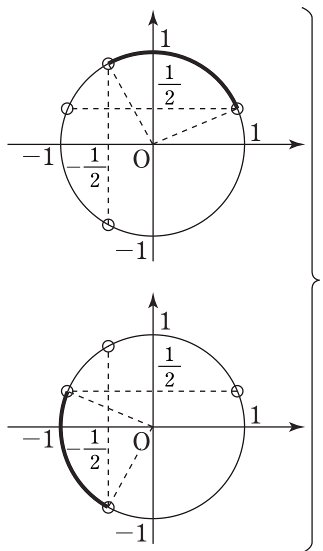
左辺を因数分解すると

$$(2a-1)(2b+1)>0$$

よって $\begin{cases} 2a-1>0 \quad かつ \quad 2b+1>0 \\ \qquad\quad または \\ 2a-1<0 \quad かつ \quad 2b+1<0 \end{cases}$

すなわち

$$\begin{cases} \sin x>\dfrac{1}{2} \quad かつ \quad \cos x>-\dfrac{1}{2} \quad\cdots\cdots② \\ \qquad\quad または \\ \sin x<\dfrac{1}{2} \quad かつ \quad \cos x<-\dfrac{1}{2} \quad\cdots\cdots③ \end{cases}$$



太線になっているところをチェック!!

$0\leqq x<2\pi$ で②③を満たす x の範囲は右図のようになる．

よって，求める x の範囲は

$$\underline{\underline{\frac{\pi}{6}<x<\frac{2}{3}\pi}}\quad または \quad \underline{\underline{\frac{5}{6}\pi<x<\frac{4}{3}\pi}}$$

……エ〜コ

〔2〕　$2+\log_{\sqrt{y}} 3 < \log_y 81 + 2\log_y\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$　……④

底の条件より $\begin{cases} \sqrt{y} > 0,\ \sqrt{y} \neq 1 \\ \text{かつ} \\ y > 0,\ y \neq 1 \end{cases}$　すなわち　$\underline{\underline{y > 0}}$，$\underline{\underline{y \neq 1}}$　……サ，シ

真数条件より　$1-\dfrac{x}{2} > 0$　よって　$\underline{\underline{x < 2}}$　……⑤　……ス

また，底の変換公式　$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　を用いて

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{y}} 3 = \dfrac{\log_3 3}{\log_3 \sqrt{y}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\log_3 y} = \underline{\underline{\dfrac{2}{\log_3 y}}} & \text{……セ} \\ \log_y 81 = \dfrac{\log_3 81}{\log_3 y} = \underline{\underline{\dfrac{4}{\log_3 y}}} & \text{……ソ} \end{cases}$$

より，④を変形すると

$$2+\frac{2}{\log_3 y} < \frac{4}{\log_3 y} + 2\cdot\frac{\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\log_3 y}$$ ←[底をそろえた!!]

整理すると

$$\underline{\underline{1 < \frac{1}{\log_3 y} + \frac{\log_3\left(1-\frac{x}{2}\right)}{\log_3 y}}}\quad\text{……⑥}$$ ……タ

よって，⑥は

(i)　$\log_3 y > 0$　すなわち　$\underline{\underline{y > 1}}$　のとき　……チ

$$\log_3 y < 1 + \log_3\left(1-\frac{x}{2}\right) = \underline{\underline{\log_3\left\{3\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}}}$$ ……ツ

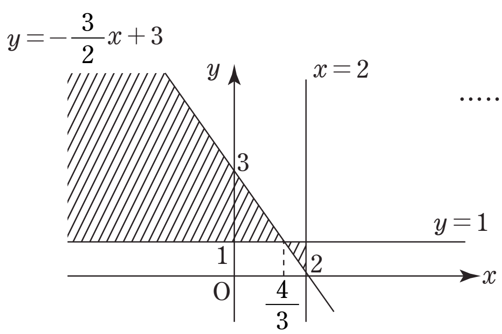
よって　$y < 3\left(1-\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}x+3$　……⑦　（底 $3>1$ より）

(ii)　$\log_3 y < 0$　すなわち　$\underline{\underline{0 < y < 1}}$ のとき　……テ

$$\log_3 y > \log_3\left\{3\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

よって　$y > -\dfrac{3}{2}x+3$　……⑧　（底 $3>1$ より）

以上より，求める領域を図示すると
（⑤かつ⑦かつ⑧より）
右図の斜線部分となる．$\underline{\underline{①}}$　……ト
（ただし，境界線はすべて含まない）



第2問

$$\begin{cases} f(x)=x^3-x \\ g(x)=f(x-a)+2a \end{cases}$$

(1)　$g(x)-f(x)=f(x-a)+2a-f(x)$

$=(x-a)^3-(x-a)+2a-(x^3-x)$

$=-3ax^2+3a^2x-a^3+3a$

$=a\underline{\underline{(-3x^2+3ax-a^2+3)}}$　……**ア～エ**

$=-a(3x^2-3ax+a^2-3)$　……①

$g(x)-f(x)=0$ が異なる2実解をもつには　$(3x^2-3ax+a^2-3=0$ の判別式$)>0$ であればよいので

$9a^2-12(a^2-3)>0$

$a^2<12$

よって　$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$

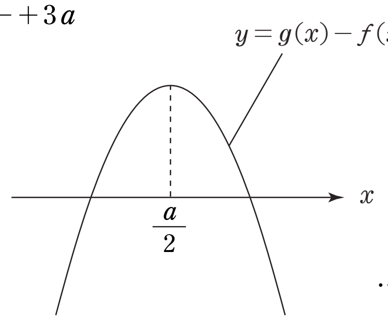
これと $a>0$ とから

$0<a<\underline{\underline{2\sqrt{3}}}$　……**オ，カ**

また　$g(x)-f(x)=-3a(x^2-ax)-a^3+3a$

$$=-3a\left\{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\right\}-a^3+3a \quad \longleftarrow [平方完成]$$

$$=-3a\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^3}{4}+3a$$



$a>0$ より，$-3a<0$ であるから，$y=g(x)-f(x)$ のグラフは，右図のような(上に凸である)放物線である．

したがって

$x=\underline{\underline{\dfrac{a}{2}}}$　のとき　……**キ，ク**

$g(x)-f(x)$ は最大値　$-\dfrac{a^3}{4}+3a=\underline{\underline{\dfrac{a}{4}(12-a^2)}}$　……**ケ～シ**

をとる．

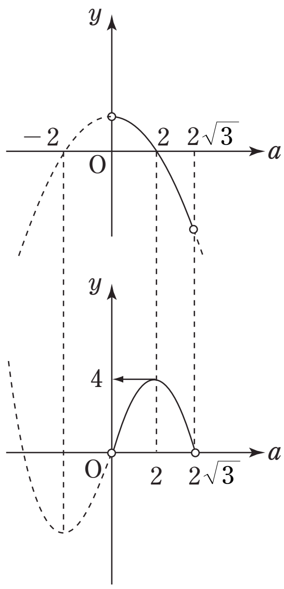
(2)　$h(a)=\dfrac{a}{4}(12-a^2)$　$(0<a<2\sqrt{3})$ より

$$h'(a)=3-\frac{3}{4}a^2=-\frac{3}{4}(a+2)(a-2)$$

したがって右下のグラフから

$a=\underline{\underline{2}}$ のとき　$(h(a)$ の最大値$)=h(2)=\underline{\underline{4}}$　　……ス，セ

となる．



(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき，①より

$$g(x)-f(x)=-\sqrt{3}\left(3x^2-3\sqrt{3}x\right)=-3\sqrt{3}x\left(x-\sqrt{3}\right)$$

したがって，

$$g(x)-(f)=0 \quad \text{の解は} \quad x=0,\ \sqrt{3}$$

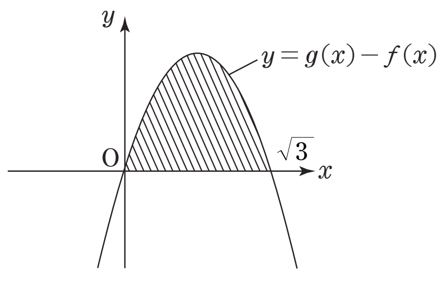
よって，2曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の2つの交点P，Qは

それぞれ P$(\underline{\underline{0}},\ 0)$，Q$(\underline{\underline{\sqrt{3}}},\ \underline{\underline{2\sqrt{3}}})$　　……ソ～ツ

また2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{3}}\{g(x)-f(x)\}\,dx \\ &= -3\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}}\left(x^2-\sqrt{3}x\right)dx \\ &= -3\sqrt{3}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= -3\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{9}{2}}} \end{aligned} \quad \cdots\cdots(*)$$

……テ，ト



である．

(＊)の[別解]

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\{g(x)-f(x)\}\,dx=-3\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}}x\left(x-\sqrt{3}\right)dx$$

$$=-3\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-0\right)^3$$

←［$\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ の利用!!］

$$=\underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

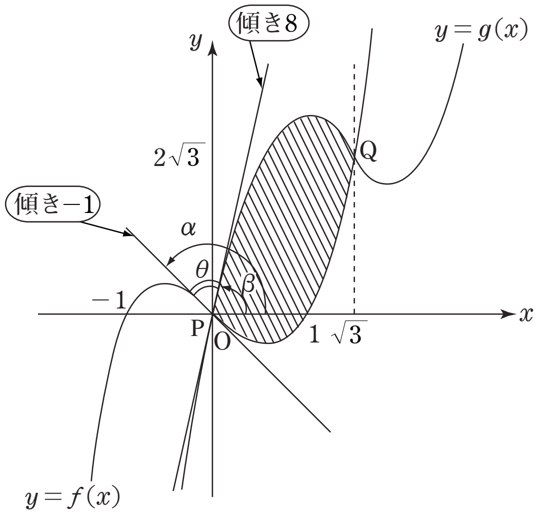
……テ，ト

さらに $\begin{cases} f'(x)=3x^2-1 \\ g'(x)=3x^2-6\sqrt{3}x+8 \end{cases}$

より，交点P(＝原点)における2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の接線の傾きは，それぞれ

$$\begin{cases} f'(0)=-1 \\ g'(0)=8 \end{cases} \quad \cdots\cdots(＊＊)$$

である．



そこで右図のように α，β を定めると，

$\tan\alpha=-1$，$\tan\beta=8$　……②

よって，②より

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

←［なす角は，“tanの加法定理”で捉える］

$$=\frac{-1-8}{1-1\cdot8}$$

$$=\underline{\underline{\frac{9}{7}}}$$

……ナ，ニ

(＊＊)の[別解]

$y=g(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを $\begin{cases} x\text{ 軸方向に } a=\sqrt{3} \\ y\text{ 軸方向に } 2a=2\sqrt{3} \end{cases}$ 平行移動したもの

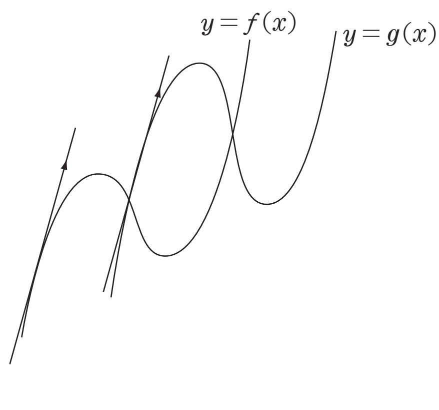
だから，

($y=g(x)$ の原点における接線の傾き)＝($y=f(x)$ の $x=-\sqrt{3}$ における接線の傾き)

である．

よって，

$$g'(0)=f'\left(-\sqrt{3}\right)=3\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2-1=8$$



第3問

(1)　$\begin{cases} a_1 = -27 \\ a_{n+1} = 3a_n + 60 \end{cases}$

$a_{n+1} = 3a_n + 60$

を変形すると

$a_{n+1} + 30 = 3(a_n + 30)$

よって　数列$\{a_n + 30\}$は，初項$a_1 + 30 = 3$，公比3の等比数列であるから

$a_n + 30 = (a_1 + 30)\cdot 3^{n-1}$

$= 3^n$　（$\because$　$a_1 = -27$）

である．

よって　$a_n = \underline{\underline{3^n - 30}}$　……**ア，イ，ウ**

したがって，数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nは，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(3^k - 30) = \frac{3(3^n - 1)}{3-1} - 30n$$ ←[項別にΣ計算]

$$= \underline{\underline{\frac{3}{2}(3^n - 1) - 30n}}$$ ……**エ～キ**

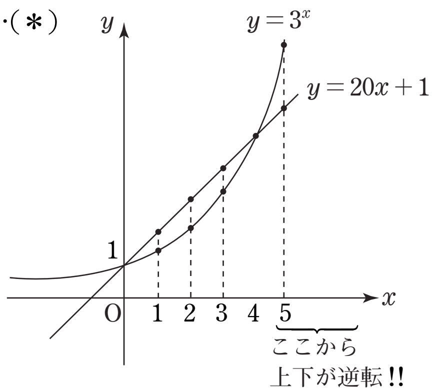
である．

また，$S_n > 0$　より　$3^n - 1 > 20n$　すなわち　$3^n > 20n + 1$　……(＊)

したがって，

これを満たす最小の自然数$n = \underline{\underline{5}}$である．……**ク**

[・$n = 4$のとき　(＊)の(左辺)$= 3^4 = 81$，(右辺)$= 81$
・$n = 5$のとき　(＊)の(左辺)$= 3^5 = 243$，(右辺)$= 101$]



(2)　$\begin{cases} 2b_n + c_n = 0 + (n-1)\cdot d = (n-1)\cdot d & \cdots\cdots① \\ b_n - 2c_n = x\cdot r^{n-1} & \cdots\cdots② \end{cases}$

①×2＋②より

$5b_n = 2(n-1)d + xr^{n-1}$　←[b_n，c_nの連立方程式を解く]

すなわち　$b_n = \dfrac{2(n-1)}{5}d + \dfrac{x}{5}r^{n-1}$　……③

また　$c_n = (n-1)d - 2b_n = (n-1)d - \dfrac{4}{5}(n-1)d - \dfrac{2}{5}xr^{n-1}$

$= \dfrac{1}{5}(n-1)d - \dfrac{2}{5}xr^{n-1}$　……④

したがって，$b_n + c_n$は③＋④より

$$b_n + c_n = \underline{\underline{\frac{3}{5}(n-1)d - \frac{1}{5}xr^{n-1}}}$$ ……**ケ～シ**

と表される．

(3)　(1)，(2)より

$$\begin{cases} a_n = 3^n - 30 \\ b_n = \dfrac{2}{5}(n-1)d + \dfrac{1}{5}xr^{n-1} \\ c_n = \dfrac{1}{5}(n-1)d - \dfrac{2}{5}xr^{n-1} \end{cases}$$

さらに数列 $\{b_n+c_n\}$ の階差数列が $\{a_n\}$ であるから

$$a_n = (b_{n+1}+c_{n+1}) - (b_n+c_n)$$

この関係が point!!

$\{b_n+c_n\}$　$b_1+c_1,\ b_2+c_2,\ \cdots,\ \boxed{b_n+c_n,\ b_{n+1}+c_{n+1}}$

$\{a_n\}$　a_1　a_2　a_n

$$= \left(\frac{3}{5}nd - \frac{1}{5}xr^n\right) - \left\{\frac{3}{5}(n-1)d - \frac{1}{5}xr^{n-1}\right\}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{5}d + \frac{1}{5}x(1-r)r^{n-1}}}\quad\cdots\cdots⑤$$

……ケ～シ

一方 $a_n = 3^n - 30$　……⑥

⑤，⑥より　$\dfrac{3}{5}d - \dfrac{1}{5}x(r-1)r^{n-1} = 3^n - 30$

$$x(r-1)\,r^{n-1}\ \boxed{-3d} = -15\cdot 3^{n-1} + \boxed{150}$$

両辺を同じ形：

○・△$^{n-1}$−□＝○′・△′$^{n-1}$−□′

にして比べたい!!

(○＝○′，△＝△′，□＝□′)

よって　$\begin{cases} x(r-1) = -15 \\ r = 3 \\ -3d = 150 \end{cases}$　ゆえに　$\begin{cases} r = 3 \\ x = -\dfrac{15}{2} \\ d = -50 \end{cases}$

……ス～ト

(2)　これらを③，④に代入すると

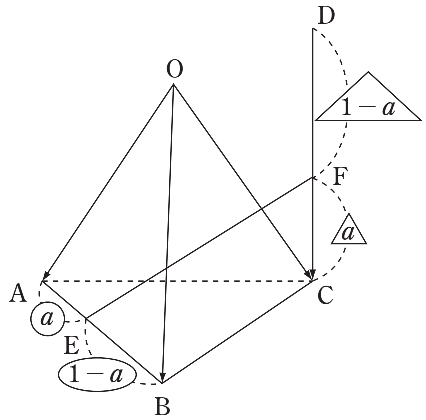
$$b_n = -20(n-1) - \frac{3}{2}\cdot 3^{n-1} = \underline{\underline{-\frac{3^n}{2} - 20(n-1)}}$$

……ナ～ネ

$$c_n = -10(n-1) + 3\cdot 3^{n-1} = \underline{\underline{3^n - 10(n-1)}}$$

……ノ～ヒ

第4問



以下 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分表示を適宜

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ と表すことにする．

A(1，0，0)，B(0，1，1)，C(1，0，1)，D(−2，−1，−2)

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(-3,\ -1,\ -3)$

より，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+a\overrightarrow{\mathrm{CD}})-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{AB}})$

$=(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+a(\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}+a\left\{\begin{pmatrix}-3\\-1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}-2\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

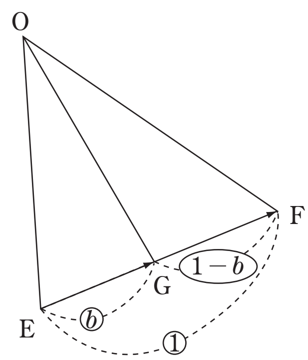
$=(\underline{\underline{-2a,\ -2a,\ 1-4a}})$　……①　　　　……**ア～カ**

さらに　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$　よって　$\begin{pmatrix}-2a\\-2a\\1-4a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=0$

ゆえに　$2a-2a+1-4a=0$

したがって　$a=\underline{\underline{\dfrac{1}{4}}}$　　　　……**キ，ク**

(2)　$a=\dfrac{1}{4}$ のとき



$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 0,\ 0)+\dfrac{1}{4}(-1,\ 1,\ 1)=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)\\[2ex]\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)\qquad\left(\text{①に } a=\dfrac{1}{4}\text{ を代入}\right)\end{cases}$$

であり，G は EF を $b:(1-b)$ に内分　するので

EG：EF $=b:1$

よって，

$\overrightarrow{\mathrm{EG}}=b\overrightarrow{\mathrm{EF}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}+b\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)+b\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

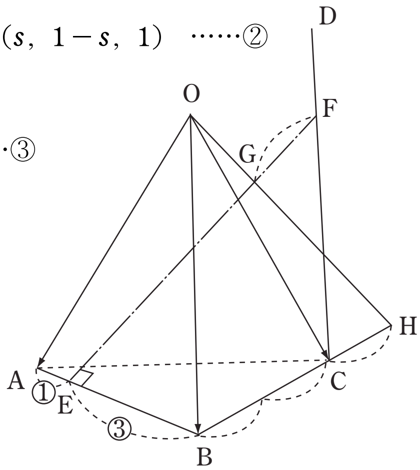
$=\underline{\underline{\left(\dfrac{3-2b}{4},\ \dfrac{1-2b}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)}}$　　　　……**ケ～セ**

と表される．

(3)

H は $\begin{cases} \text{BC 上：} \overrightarrow{\mathrm{BH}} = s\overrightarrow{\mathrm{BC}} \text{ より } \overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{\mathrm{OC}} \\ \qquad = (1-s)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (s,\ 1-s,\ 1) \quad \cdots\cdots ② \\ \text{かつ} \\ \text{OG 上：} \overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\overrightarrow{\mathrm{OG}} = t\cdot\left(\dfrac{3-2b}{4},\ \dfrac{1-2b}{4},\ \dfrac{1}{4}\right) \quad \cdots\cdots ③ \end{cases}$

((2)より)



②，③より

$$\begin{cases} (3-2b)t = 4s \\ (1-2b)t = 4(1-s) \\ t = 4 \end{cases} \quad \text{よって} \quad \begin{cases} 3-2b = s \\ 1-2b = 1-s \\ t = 4 \end{cases}$$

ゆえに，$b = \dfrac{3}{4}$，$s = \dfrac{3}{2}$，$t = 4$ ……ソ，テ

したがって，②に $s = \dfrac{3}{2}$ を代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 1\right)$$

すなわち点 H の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ ……ト～ネ

また $s = \dfrac{3}{2}$ より点 H は線分 BC を 3：1 に外分する ……ノ