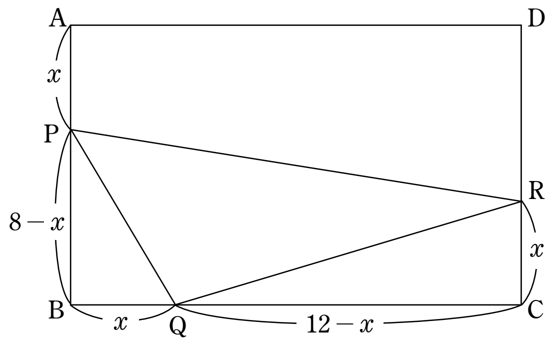
2008 年度大学入試センター試験　解説〈数学ⅠA〉

第１問

〔１〕



上図において，台形 PBCR の面積は

$$\frac{1}{2}(\mathrm{PB}+\mathrm{CR})\times \mathrm{BC}$$

$$=\frac{1}{2}\{(8-x)+x\}\times 12$$

$$=\frac{1}{2}\times 8\times 12$$

$$=\underline{\underline{48}}$$ ……アイ

また，△PQR の面積 S は上の台形 PBCR の面積から △PBQ の面積と △QCR の面積を引けばよいから

$$S=48-\frac{1}{2}x(8-x)-\frac{1}{2}x(12-x)$$

$$=48-\frac{1}{2}x(20-2x)$$

$$=x^2-\underline{\underline{10}}x+\underline{\underline{48}}$$ ……ウエ，オカ

である．

$S<24$ ならば

$$x^2-10x+48<24$$

$$x^2-10x+24<0$$

$$(x-4)(x-6)<0$$

よって，$\underline{\underline{4}}<x<\underline{\underline{6}}$ ……キ，ク

（これは $0<x<8$ を満たす）

〔2〕

$$\boldsymbol{p} \overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{r}$$

すなわち，$\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{r}$ であるための必要条件であるが，十分条件でない．（①）　　……**ケ**

$(p \to r)$

　$m=n=1$ のとき，p は満たすが，r は満たさない．

　よって，$p \to r$ は不成立．

$(p \leftarrow r)$

　m，n が r を満たすならば，m，n はともに偶数となるので，$m+n$ も偶数となり p を満たす．

　よって，$p \leftarrow r$ は成立する．

以上より，$p \overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}} r$ となる．

$$\overline{\boldsymbol{p}} \overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} \overline{\boldsymbol{r}}$$

すなわち，$\overline{\boldsymbol{p}}$ は $\overline{\boldsymbol{r}}$ であるための十分条件であるが，必要条件でない．（②）　　……**コ**

　$\overline{p}$ ：$m+n$ は奇数（m，n の一方が偶数で，もう一方が奇数）

　$\overline{r}$ ：m は奇数，または n は 4 で割り切れない．

$\left(\overline{p} \to \overline{r}\right)$

　m が偶数のときは，n が奇数で 4 で割り切れないので $\overline{r}$ を満たす．

　m が奇数のときは，$\overline{r}$ を満たす．

　いずれの場合も $\overline{p} \to \overline{r}$ は成立する．

$\left(\overline{p} \leftarrow \overline{r}\right)$

　$m=n=1$ のとき，$\overline{r}$ は満たすが，$\overline{p}$ は満たさない．

　よって $\overline{p} \leftarrow \overline{r}$ は不成立．

以上より，$\overline{p} \overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} \overline{r}$ となる．

（別解）

$p \to r$，$p \leftarrow r$ のそれぞれの対偶を考えてもよい．

$p \to r$ は成立しないので，対偶の $\overline{p} \leftarrow \overline{r}$ も成立しない．

$p \leftarrow r$ は成立するので，対偶の $\overline{p} \to \overline{r}$ も成立する．

よって，$\overline{p} \overset{\bigcirc}{\underset{\times}{\rightleftarrows}} \overline{r}$

「$\boldsymbol{p}$ かつ $\boldsymbol{q}$」 $\overset{\bigcirc}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}$ $\boldsymbol{r}$

すなわち，「$\boldsymbol{p}$ かつ $\boldsymbol{q}$」は $\boldsymbol{r}$ であるための必要十分条件である．（⓪）　　……**サ**

p かつ q ：$m+n$ は 2 で割り切れ，かつ n は 4 で割り切れる．

　　　　　（m は 2 で割り切れ，かつ n は 4 で割り切れる）

(「p かつ q」$\rightarrow r$，「p かつ q」$\leftarrow r$)

「p かつ q」は条件 r そのものであるから，「p かつ q」$\rightarrow r$，「p かつ q」$\leftarrow r$ はともに成立する．

「p または q」$\underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ r

すなわち，「p または q」は r であるための必要条件であるが，十分条件でない．(①)

……シ

p または q ： $m+n$ は 2 で割り切れる，または n は 4 で割り切れる．

(「p または q」$\rightarrow r$)

$m=n=1$ のとき $m+n$ は 2 で割り切れ「p または q」は成り立つが，r は成り立たない．

よって，「p または q」$\rightarrow r$ は不成立．

(「p または q」$\leftarrow r$)

m，n が r を満たすならば，m，n は p，q をいずれも満たす．

よって，「p または q」$\leftarrow r$ は成立する．

以上より，「p または q」$\underset{\bigcirc}{\overset{\times}{\rightleftarrows}}$ r となる．

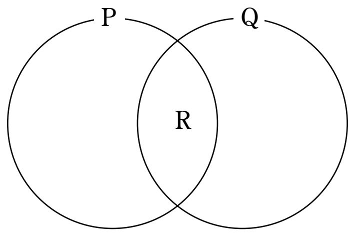
(注)　集合の包含関係におきかえて考えてもよい．

P ： p を満たす自然数 m，n の集合

Q ： q を満たす自然数 m，n の集合

R ： r を満たす自然数 m，n の集合

としたとき，右図のような包含関係が成り立つ．



すなわち，

$\mathrm{P}\supset\mathrm{R}$，$\mathrm{P}\not\subset\mathrm{R}$

$\overline{\mathrm{P}}\subset\overline{\mathrm{R}}$，$\overline{\mathrm{P}}\not\supset\overline{\mathrm{R}}$

$\mathrm{P}\cap\mathrm{Q}=\mathrm{R}$

$\mathrm{P}\cup\mathrm{Q}\supset\mathrm{R}$，$\mathrm{P}\cup\mathrm{Q}\not\subset\mathrm{R}$

第2問

$$y=ax^2-bx-a+b \quad \cdots①$$

のグラフが点 $(-2,\ 6)$ を通ることから

$$6=a\cdot(-2)^2-b\cdot(-2)-a+b$$
$$=4a+2b-a+b$$
$$b=-a+\underline{\underline{2}} \qquad \cdots\cdots ア$$

したがって，①は

$$y=ax^2-(-a+2)x-a+(-a+2)$$
$$=a\left(x^2-\frac{-a+2}{a}x\right)-2a+2$$
$$=a\left\{\left(x-\frac{-a+2}{2a}\right)^2-\frac{(-a+2)^2}{4a^2}\right\}-2a+2$$
$$=a\left(x-\frac{-a+2}{2a}\right)^2-\frac{(-a+2)^2}{4a}-2a+2$$
$$=a\left(x-\frac{-a+2}{2a}\right)^2-\frac{a^2-4a+4+8a^2-8a}{4a}$$
$$=a\left(x-\frac{-a+2}{2a}\right)^2-\frac{9a^2-12a+4}{4a}$$
$$=a\left(x-\frac{-a+2}{2a}\right)^2-\frac{(3a-2)^2}{4a}$$

と表される．よって，①のグラフの頂点の座標は

$$\left(\underline{\underline{\frac{-a+2}{2a}}},\ \underline{\underline{\frac{-(3a-2)^2}{4a}}}\right) \qquad \cdots\cdots イ，ウ，エ，オ，カ$$

である．

また，$-\dfrac{(3a-2)^2}{4a}=-2$ のとき

$$(3a-2)^2=8a$$
$$\underline{\underline{9a^2-20a+4}}=0 \qquad \cdots\cdots キ，クケ，コ$$
$$(a-2)(9a-2)=0$$

よって，$a=\underline{\underline{2,\ \dfrac{2}{9}}}$ ……サ，シ，ス

$a=\dfrac{2}{9}$ のとき，頂点の x 座標は

$$\frac{-\frac{2}{9}+2}{2\cdot\frac{2}{9}}=\frac{-2+18}{4}=\underline{\underline{4}} \qquad \cdots\cdots セ$$

であり，$b=-\dfrac{2}{9}+2=\dfrac{16}{9}$ となる．よって，①は

$$y=\frac{2}{9}x^2-\frac{16}{9}x-\frac{2}{9}+\frac{16}{9}$$

$$=\frac{2}{9}(x^2-8x+7)$$

と表されるから，①のグラフと x 軸との交点の x 座標は

$y=0$　すなわち　$x^2-8x+7=0$ の解である．

$x^2-8x+7=(x-1)(x-7)=0$　より

$x=\underline{\underline{1}},\ \underline{\underline{7}}$　　　　……**ソ，タ**

一方，①は

$$y=\frac{2}{9}(x^2-8x+7)$$

$$=\frac{2}{9}\{(x-4)^2-9\}$$

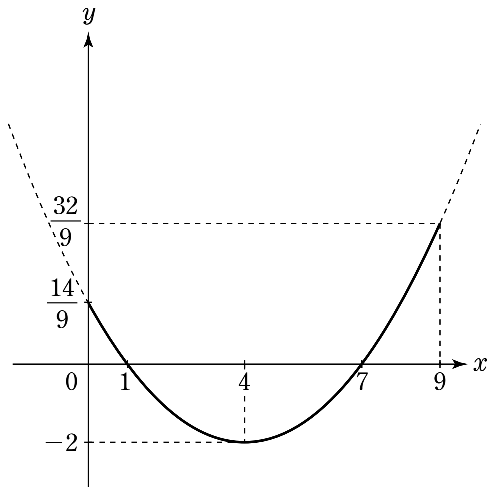
$$=\frac{2}{9}(x-4)^2-2$$

と表されるから，$0\leqq x\leqq 9$ において①は

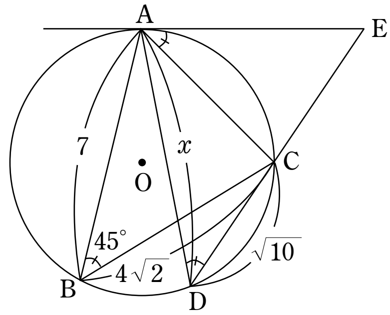
$x=\underline{\underline{4}}$ のとき　最小値 $\underline{\underline{-2}}$　　　　……**チ，ツテ**

$x=\underline{\underline{9}}$ のとき　最大値 $\frac{2}{9}\times5^2-2=\underline{\underline{\frac{32}{9}}}$　　　　……**ト，ナニ，ヌ**

をとる．



第3問



△ABC に余弦定理を用いると

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$$
$$= 49 + 32 - 2\cdot 7\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= 25$$

CA > 0 より　$CA = \underline{\underline{5}}$ ……ア

また，△ABC に正弦定理を用いると，外接円 O の半径 R は

$$\frac{CA}{\sin\angle ABC} = 2R$$

より

$$R = \underline{\underline{\frac{5}{2}\sqrt{2}}}$$ ……イ，ウ，エ

上図のように点 D をとると，∠ADC は弧 AC に対する円周角であるから ∠ABC に等しい．

よって，$\angle ADC = \underline{\underline{45^\circ}}$ ……オ，カ

△ADC に余弦定理を用いると

$$5^2 = x^2 + (\sqrt{10})^2 - 2\cdot x\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x^2 - \underline{\underline{2\sqrt{5}}}x - \underline{\underline{15}} = 0$$ ……キ，ク，ケコ
$$(x - 3\sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

$x > 0$ より，$x = 3\sqrt{5}$

よって，$AD = x = \underline{\underline{3\sqrt{5}}}$ ……サ，シ

次に，点 A における外接円 O の接線と辺 DC の延長の交点を E とすると，接弦定理により

$\angle CAE = \angle ADE$　…$\underline{\underline{①}}$ ……ス

かつ ∠E が共通なことより

△ACE ∽ △DAE　…$\underline{\underline{②}}$ ……セ

したがって，

$$EC : EA = CA : AD = 5 : 3\sqrt{5}$$

よって　$EA=\underline{\underline{\dfrac{3}{5}\sqrt{5}}}\,EC$ ……ソ，タ，チ

また，$\triangle ACE \backsim \triangle DAE$ より

$EA : ED = EC : EA$

すなわち，

$EA^2=\underline{\underline{ED}}\cdot EC$　…(⑤) ……ツ

(以上の5行を※とする)

（注）　この式 ~~~~ を**方べきの定理**という．

※より $\dfrac{9}{5}EC^2=(\sqrt{10}+EC)\cdot EC$

$EC\fallingdotseq 0$ より，$\dfrac{4}{5}EC=\sqrt{10}$

$EC=\dfrac{5}{4}\sqrt{10}$

よって，$EA=\dfrac{3}{5}\sqrt{5}\cdot\dfrac{5}{4}\sqrt{10}=\underline{\underline{\dfrac{15}{4}\sqrt{2}}}$ ……テト，ナ，ニ

以上より，$\triangle ACE=\dfrac{1}{2}AC\cdot AE\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{15}{4}\sqrt{2}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=\underline{\underline{\dfrac{75}{8}}}$ ……ヌネ，ノ

第4問

(1)　AAA となる目の出方は，1 か 2 が 3 回続けて出る場合であるから

$2^3 = \underline{\underline{8}}$（通り）　……**ア**

AB となる目の出方は，1 回目に 5 か 6，2 回目に 1 か 2，3 回目に 3 か 4 が出る場合に限られるから

$2^3 = \underline{\underline{8}}$（通り）　……**イ**

(2)　5 か 6 の目が出る場合を×で表すと，文字の列が A となる場合は

× × A
A × A
A A ×
A B ×
B × A

の 5 通りである．A，B，×の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ だから，文字の列が A となる確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 5 = \frac{5}{\underline{\underline{27}}}$$ ……**ウ，エオ**

同様に，何も書かれていない文字の列ができる場合は

× × ×
× A ×
× B ×
A × ×
B × ×

の 5 通りであるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 5 = \frac{5}{\underline{\underline{27}}}$$ ……**カ，キク**

(3)　A または B が出る場合を○で表すと，文字の列の字数が 3 となるのは○○○となる場合であり，○となる確率は $\frac{2}{3}$ であるから，求める確率は

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{\underline{\underline{27}}}$$ ……**ケ，コサ**

文字の列の字数が 2 となるのは×○○となる場合なので，求める確率は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{\underline{\underline{27}}}$$ ……**シ，スセ**

文字の列の字数が 1 となる確率は，

$$1 - \frac{5}{27} - \frac{4}{27} - \frac{8}{27} = \frac{10}{27}$$

以上より，文字の列の字数の期待値は

$$
\begin{aligned}
&0\cdot\frac{5}{27}+1\cdot\frac{10}{27}+2\cdot\frac{4}{27}+3\cdot\frac{8}{27}\\
&=\frac{42}{27}\\
&=\underline{\underline{\frac{14}{9}}}
\end{aligned}
$$

……ソタ，チ