Ⓜ

# 数　学 ②　数学Ⅱ

(100点 / 60分)

この問題冊子には，**「数学Ⅱ」「数学Ⅱ・数学B」**の2科目を掲載しています。解答する科目を間違えないよう選択しなさい。

**工業数理基礎，簿記・会計及び情報関係基礎の問題冊子は，大学入試センター試験の出願時に，それぞれの科目の受験を希望した者に配付します。**

## Ⅰ　注　意　事　項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

| 出題科目 | ページ | 選択方法 |
|---|---|---|
| 数　学　Ⅱ | 4〜14 | 左の2科目のうちから1科目を選択し，解答しなさい。 |
| 数学Ⅱ・数学B | 15〜32 | |

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

**受験番号**（数字及び英字）を**記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄，試験場コード欄**

**氏名・フリガナ**及び**試験場コード**（数字）を**記入**しなさい。

③　**解答科目欄**

**解答する科目**を一つ選び，科目の下の ○ に**マーク**しなさい。**マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，0点となります。**

5　選択問題については，解答する問題を決めたあと，その問題番号の解答欄に解答しなさい。ただし，**指定された問題数をこえて解答してはいけません。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

## Ⅱ　解答上の注意

**解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。**

## Ⅱ　解答上の注意

1　解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2　問題の文中の $\boxed{\textbf{ア}}$，$\boxed{\textbf{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，符号(－)，数字(0～9)，又は文字(a～d)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

**例**　$\boxed{\textbf{アイウ}}$ に－8$a$と答えたいとき

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ア | ● | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| イ | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ● | ⑨ | ⓐ | ⓑ | ⓒ | ⓓ |
| ウ | ⊖ | ⓪ | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ● | ⓑ | ⓒ | ⓓ |

なお，同一の問題文中に $\boxed{\textbf{ア}}$，$\boxed{\textbf{イウ}}$ などが2度以上現れる場合，2度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イウ}}$ のように細字で表記します。

3　分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\textbf{エオ}}}{\boxed{\textbf{カ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2a+1}{3}$ と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$，$\dfrac{4a+2}{6}$ のように答えてはいけません。

4　根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$ と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$ のように答えてはいけません。

# 数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

## 第１問　（配点　30）

〔１〕 $x \geqq 2$，$y \geqq 2$，$8 \leqq xy \leqq 16$ のとき，$z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y$ の最大値を求めよう。

$s = \log_2 x$，$t = \log_2 y$ とおくと，$s$，$t$，$s + t$ のとり得る値の範囲はそれぞれ

$$s \geqq \boxed{\text{ア}}, \quad t \geqq \boxed{\text{ア}}, \quad \boxed{\text{イ}} \leqq s + t \leqq \boxed{\text{ウ}}$$

となる。また

$$z = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} s + t$$

が成り立つから，$z$ は $s = \boxed{\text{カ}}$，$t = \boxed{\text{キ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。したがって，$z$ は $x = \boxed{\text{コ}}$，$y = \boxed{\text{サ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ をとる。

（数学Ⅱ第１問は６ページに続く。）

（下 書 き 用 紙）

数学Ⅱ第１問の試験問題は次ページに続く。

〔2〕 $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$$5\sin\theta - 3\cos 2\theta = 3 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

を満たす $\theta$ について考えよう。

方程式$(*)$を $\sin\theta$ を用いて表すと

$$\boxed{\text{シ}}\sin^2\theta + 5\sin\theta - \boxed{\text{ス}} = 0$$

となる。したがって，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より

$$\sin\theta = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であり，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲でこの等式を満たす $\theta$ のうち，小さい方を $\theta_1$，大きい方を $\theta_2$ とすると

$$\cos\theta_1 = \frac{\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{ソ}}},\quad \cos\theta_2 = \frac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

$\theta_1$ について不等式 $\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つ。$\boxed{\text{ツ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{12}$　① $\frac{\pi}{12} < \theta_1 < \frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{6} < \theta_1 < \frac{\pi}{5}$

③ $\frac{\pi}{5} < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$　④ $\frac{\pi}{4} < \theta_1 < \frac{\pi}{3}$　⑤ $\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$

ただし，必要ならば，次の値

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},\quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

を用いてもよい。

さらに，不等式 $n\theta_1 > \theta_2$ を満たす自然数 $n$ のうち最小のものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

（下 書 き 用 紙）

数学Ⅱの試験問題は次ページに続く。

## 第2問 (配点 30)

放物線 $y = 2x^2$ を $C$，点$(1,\ -2)$をAとする。

点$\mathrm{Q}(u,\ v)$に関して，点Aと対称な点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とすると

$$u = \frac{x + \boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad v = \frac{y - \boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

が成り立つ。Qが $C$ 上を動くときの点Pの軌跡を $D$ とすると，$D$ は放物線

$$y = x^2 + \boxed{\text{オ}}\,x + \boxed{\text{カ}}$$

である。

二つの放物線 $C$ と $D$ の交点をRとSとする。ただし，$x$ 座標の小さい方をRとする。点R，Sの $x$ 座標はそれぞれ $\boxed{\text{キク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ で，点R，Sにおける放物線 $D$ の接線の方程式はそれぞれ

$$y = \boxed{\text{コ}},\quad y = \boxed{\text{サ}}\,x - \boxed{\text{シ}}$$

である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

Pを放物線$D$上の点とし，Pの$x$座標を$a$とおく。Pから$x$軸に引いた垂線と放物線$C$との交点をHとする。$\boxed{\text{キク}} < a < \boxed{\text{ケ}}$のとき，三角形PHRの面積$S(a)$は

$$S(a) = \frac{1}{\boxed{\text{ス}}}\left(\boxed{\text{セ}}\,a^3 + a^2 + \boxed{\text{ソ}}\,a + \boxed{\text{タ}}\right)$$

と表される。$S(a)$は$a = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$のとき，最大値をとる。

$a = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$のとき，直線HRと放物線$D$の交点のうち，Rと異なる点の$x$座標は$\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$である。このとき，$\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} \leqq x \leqq \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$の範囲で，放物線$D$と直線PHおよび直線HRで囲まれた図形の面積は$\dfrac{\boxed{\text{ナニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$である。

## 第3問 (配点 20)

座標平面において，原点Oを中心とする半径1の円 $C_1$ 上の2点P，Qに対して，線分PQ上の点NをPN：NQ＝4：1となるようにとる。ただし，PとQが一致するときは，NはP，Qと同じ点とする。

(1) 点P，Qの座標をそれぞれ$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$(\cos\beta,\ \sin\beta)$とする。ここで，$0 \leqq \alpha < 2\pi$，$0 \leqq \beta < 2\pi$ とする。このとき，点Nの座標$(X,\ Y)$は

$$X = \frac{\cos\alpha + \boxed{\text{ア}}\cos\beta}{\boxed{\text{イ}}},\quad Y = \frac{\sin\alpha + \boxed{\text{ウ}}\sin\beta}{\boxed{\text{エ}}}$$

で与えられ

$$X^2 + Y^2 = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}\cos(\alpha - \beta) + \frac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$$

となるので，点P，Qを円 $C_1$ 上で動かすとき，$X^2 + Y^2$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{スセ}}} \leqq X^2 + Y^2 \leqq 1$$

である。

(数学Ⅱ第3問は次ページに続く。)

(2) 点P，Qを円 $C_1$ 上で動かしたとき，点Nは不等式

$$\frac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}} \leqq x^2+y^2 \leqq 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が表す領域全体を動くことを示そう。

点Q$(\cos\beta,\ \sin\beta)$を固定し，点Pを $C_1$ 上で1周させたとき，点Nの軌跡は，点

$$\mathrm{T}\left(\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}\cos\beta,\ \frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\sin\beta\right)$$

を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$ の円 $C_2$ である。

さらに，点Qを $C_1$ 上で1周させたとき，Tは原点を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}$ の円上を1周する。したがって，点Qを $C_1$ 上で1周させたとき，円 $C_2$ が通過してできる図形は，上の不等式$(*)$が表す領域と一致する。

## 第4問 （配点　20）

$P(x)$を3次の整式とし，$a$，$b$，$c$は実数であり，$a \neq 0$とする。$P(x)$を$5ax^2 - bx + c$で割ったとき，商は$-x+2$で，余りは$2x-4$であるとする。

(1)　$P(x)$は$x - \boxed{\text{ア}}$で割り切れる。その商は

$$\boxed{\text{イウエ}}x^2 + \boxed{\text{オ}}x - \boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}$$

である。

また，$P(x)$を$(5x-2)(x-1)$で割ったときの余りが$4x$であるとすると，$b$と$c$は$a$を用いて

$$b = \boxed{\text{ク}}a - \boxed{\text{ケ}},\quad c = \boxed{\text{コ}}a + \boxed{\text{サ}}$$

と表される。

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

以下では $b = \boxed{\text{ク}}\,a - \boxed{\text{ケ}}$, $c = \boxed{\text{コ}}\,a + \boxed{\text{サ}}$ とする。

(2) 3次方程式 $P(x) = 0$ が0と異なる三つの解をもつとき，それら三つの解の逆数の和は $a$ を用いて表すと

$$4 - \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}\,a - \boxed{\text{セ}}}$$

である。

(3) 3次方程式 $P(x) = 0$ の一つの解の逆数が $1 + ki$（$k$ は正の実数）であるとする。このとき，三つの解の逆数の和は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり，$a$ の値は $\boxed{\text{チ}}$ となる。したがって，$k$ の値は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

（下 書 き 用 紙）