2010年度大学入試センター試験　解説〈数学ⅡB〉

第1問

〔1〕

$$(*)\quad \begin{cases} xy = 128 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} = \dfrac{7}{12} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

（ただし，$x \neq 1$，$y \neq 1$）

①の両辺で 2 を底とする対数をとると

$\log_2 xy = \log_2 128$

$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 2^7 = \underline{\underline{7}}$　　……ア

これと②より

$$\frac{\log_2 x + \log_2 y}{(\log_2 x)(\log_2 y)} = \frac{7}{(\log_2 x)(\log_2 y)} = \frac{7}{12}$$

よって，

$(\log_2 x)(\log_2 y) = \underline{\underline{12}}$　　……イウ

である。

したがって，$\log_2 x$，$\log_2 y$ は 2 次方程式

$t^2 - \underline{\underline{7}}t + \underline{\underline{12}} = 0$　……③　　……エ，オカ

の解である。

$$\left[\begin{array}{l} (t - \log_2 x)(t - \log_2 y) = 0 \\ t^2 - (\log_2 x + \log_2 y)t + (\log_2 x)(\log_2 y) = 0 \end{array}\right]$$

③を解いて　$(t-3)(t-4) = 0$

$t = \underline{\underline{3}},\ \underline{\underline{4}}$　（または，4，3）　　……キ，ク

よって，

$(\log_2 x,\ \log_2 y) = (3,\ 4)$　（または $(\log_2 x,\ \log_2 y) = (4,\ 3)$）

すなわち，連立方程式（$*$）の解は

$(x,\ y) = (\underline{\underline{8}},\ \underline{\underline{16}})$　（または $(x,\ y) = (16,\ 8)$）　　……ケ，コサ

である。

〔2〕　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

$\sin 4\theta = \cos\theta$　……①

一般に，すべての x について

$\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$　(……$\underline{\underline{①}}$)　……シ

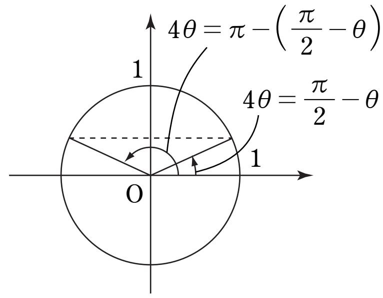
であるので

$\sin 4\theta = \cos\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0 < 4\theta < 2\pi$，$0 < \dfrac{\pi}{2} - \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると

$4\theta = \dfrac{\pi}{2} - \theta$　または　$4\theta = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

$\left(= \dfrac{\pi}{2} + \theta \right)$



よって，

$\theta = \underline{\underline{\dfrac{\pi}{6}}}$　または　$\theta = \underline{\underline{\dfrac{\pi}{10}}}$　……ス，セソ

である。

$\sin\dfrac{\pi}{6} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$　……タ，チ

である。

ここで①より

$\underline{\underline{2}}\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta = \cos\theta$　……ツ

$2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta \cdot (1 - 2\sin^2\theta) = \cos\theta$　←［2倍角の公式を2度用いて左辺を変形］

$(\underline{\underline{4}}\sin\theta - \underline{\underline{8}}\sin^3\theta)\cos\theta = \cos\theta$　……テ，ト

$\cos\theta > 0$　より

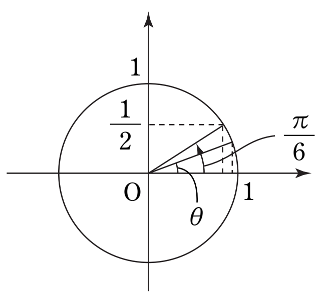
$8\sin^3\theta - 4\sin\theta + 1 = 0$　……②　←［$\sin\theta$ だけの式に!!］

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　は②を満たすので

$(2\sin\theta - 1)(4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1) = 0$　←［因数定理］

$\theta = \dfrac{\pi}{10}$ とすると

$\sin\theta \fallingdotseq \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$



よって，$2\sin\theta - 1 \fallingdotseq 0$ より

$4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$　……ナ，ニ

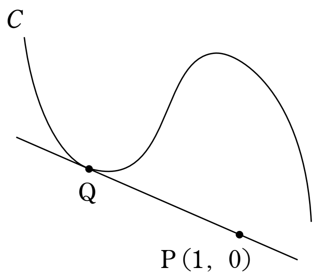
となる。

ここで $\sin\dfrac{\pi}{10} > 0$ より

$\sin\dfrac{\pi}{10} = \sin\theta = \underline{\underline{\dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}}}$　……ヌ〜ハ

である。

第 2 問



$C : y=-x^3+9x^2+kx=f(x)$ とおく。

(1)　$f'(x)=-3x^2+18x+k$　より

点 Q $(t,\ -t^3+9t^2+kt)$ における曲線 C の接線は，

$$y-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(x-t)$$

これが点 P (1, 0) を通るとき

$$0-(-t^3+9t^2+kt)=(-3t^2+18t+k)(1-t)$$

$$t^3-9t^2-kt=3t^3-21t^2+(18-k)t+k$$

点 $(t,\ f(t))$ における
$y=f(x)$ の接線は
$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

より，

$$-2t^3+\underline{\underline{12}}t^2-\underline{\underline{18}}t=k\quad\cdots\cdots①$$　　……**ア，イウ，エオ**

が成り立つ。

$P(t)=-2t^3+12t^2-18t$　$(=-2t(t-3)^2)$ とおくと

$$P'(t)=-6t^2+24t-18$$
$$=-6(t-1)(t-3)$$

よって，$P(t)$の増減表は次のようになる。

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$P'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$P(t)$	↘	-8	↗	0	↘

ゆえに，

$t=\underline{\underline{1}}$ で　極小値 $P(1)=\underline{\underline{-8}}$　　……**カ，キク**

$t=\underline{\underline{3}}$ で　極大値 $P(3)=\underline{\underline{0}}$　　……**ケ，コ**

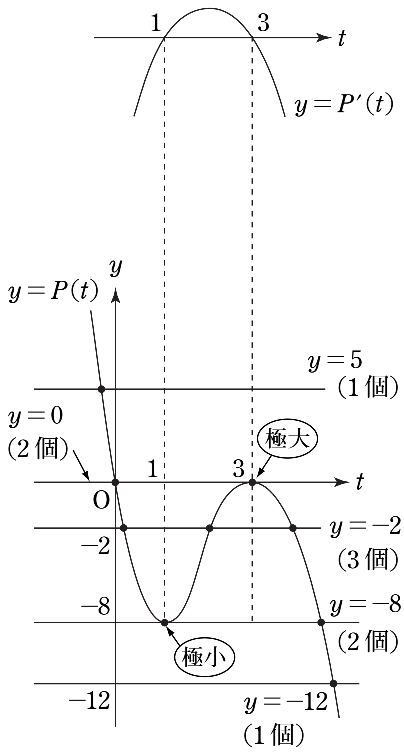
をとる。

ここで，接線の本数は，接点の個数と一致し，

それは t の方程式①の実数解の個数

すなわち $\left\{\begin{array}{l}\text{曲線 } y=P(t)\\ \qquad\text{と}\\ \text{直線 } y=k\end{array}\right.$ のグラフの共有点の個数

である。



よって，右図より，

接線の本数が 2 本のとき

$k=\underline{\underline{0}}$　または　$\underline{\underline{-8}}$　　……**サ，シス**

また　$k=5$　のとき　$\underline{\underline{1}}$ 本　　……**セ**

$k=-2$　のとき　$\underline{\underline{3}}$ 本　　……**ソ**

$k=-12$ のとき　$\underline{\underline{1}}$ 本　　……**タ**

となる。

(2)　$k=0$ とする。

$$\begin{cases} C: y=-x^3+9x^2\,(=-x^2(x-9)) \\ D: y=-x^3+6x^2+7x\,(=-x(x+1)(x-7)) \end{cases}$$

C，D の交点の x 座標は

$$-x^3+9x^2=-x^3+6x^2+7x$$

$$3x^2-7x=0$$

$$x(3x-7)=0$$

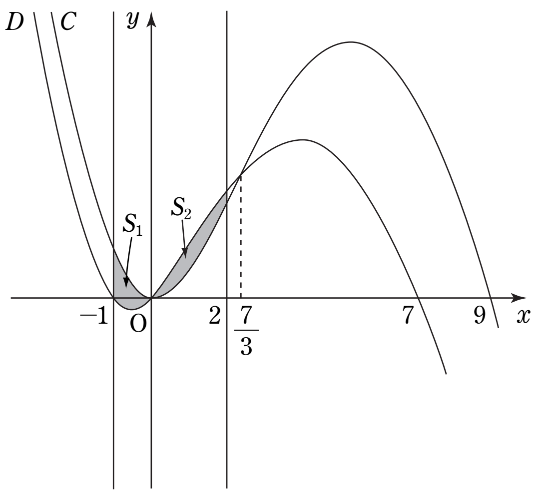
$$x=\underline{\underline{0}},\ \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$$ ……チ，ツテ

である。

また，右下図網目部分の面積をそれぞれ S_1，S_2 とおくと，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= S_1+S_2 \\ &= \int_{-1}^{0}\{(-x^3+9x^2)-(-x^3+6x^2+7x)\}dx \\ &\quad +\int_{0}^{2}\{(-x^3+6x^2+7x)-(-x^3+9x^2)\}dx \\ &= \int_{-1}^{0}(3x^2-7x)dx+\int_{0}^{2}(-3x^2+7x)dx \\ &= \left[\ x^3-\frac{7}{2}x^2\ \right]_{-1}^{0}+\left[\ -x^3+\frac{7}{2}x^2\right]_{0}^{2} \\ &= \frac{9}{2}+6 \\ &= \underline{\underline{\frac{21}{2}}} \end{aligned}$$ ……ト～ニ

である。



第3問

第1群 a_1　第2群 a_2　第3群 a_3　第4群 a_4　第$(n-1)$群　第n群

$$1 \mid 2,\ 3,\ 4,\ 5 \mid 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \mid 13,\ \cdots,\ 22 \mid \cdots \mid \cdots\ ,\ a_{n-1} \mid \cdots\ ,\ a_n \mid$$

1個　4個　7個　10個　$\{3(n-1)-2\}$個　$(3n-2)$個

+3個　+3個　+3個　+3個　+3個

(1)　$a_1=1$

$a_2=1+4=5$

$a_3=1+4+7=12$

$a_4=1+4+7+10=\underline{\underline{22}}$　……アイ

である。

ここで，a_n-a_{n-1} は第 n 群に含まれる項の個数を表すので，

$a_n-a_{n-1}=\underline{\underline{3}}n-\underline{\underline{2}}$　……ウ，エ

が成り立つ。

よって

$$a_{n+1}-a_n=3(n+1)-2=3n+1$$

$n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k+1) \\ &= 1+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+(n-1) \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n}} \end{aligned}$$

……オ～ケ

これは $n=1$ のときも $a_1=1$ となって成り立つ。

600 が第 n 群に含まれるとすると

第$(n-1)$群　第n群

$\cdots \mid \cdots\ ,\ a_{n-1} \mid \cdots,\ 600,\ \cdots\ ,\ a_n \mid$

$$a_{n-1}<600 \leqq a_n$$

$$\frac{(n-1)(3n-4)}{2}<600 \leqq \frac{n(3n-1)}{2}$$

$(n-1)(3n-4)<1200 \leqq n(3n-1)$　……①

ここで

$20\cdot 59=1180$

$21\cdot 62=1302$

であるから $n=21$ のとき①を満たす。

第 20 群の最後の項は $\frac{20\cdot 59}{2}$ であるから，600 は

$$600-\frac{20\cdot 59}{2}=10\text{（番目）}$$

$$\overset{a_{20}}{\frac{20\cdot 59}{2}}\,\Bigg|\,\underbrace{\frac{20\cdot 59}{2}+1}_{\text{1 番目}},\ \underbrace{\frac{20\cdot 59}{2}+2}_{\text{2 番目}},\ \cdots,\ \underbrace{\frac{20\cdot 59}{2}+10}_{\text{10 番目!!}},\ \cdots,\ \overset{a_{21}}{\frac{21\cdot 62}{2}}\,\Bigg|$$

すなわち 600 は

第 $\underline{\underline{21}}$ 群の $\underline{\underline{10}}$ 番目の項　……**コサ，シス**

である。

(2)　第 n 群　第 $(n+1)$ 群

$$\cdots\ \Big|\ \cdots\ ,\ a_n\ \Big|\ a_n+1,\ \underbrace{\overset{b_1}{a_n+2}}_{\text{2 番目}},\ a_n+3,\ \underbrace{\overset{b_2}{a_n+4}}_{\text{4 番目}},\ a_n+5,\ \underbrace{\overset{b_3}{a_n+6}}_{\text{6 番目}},\ \cdots,\ \underbrace{\overset{b_n}{a_n+2n}}_{2n\text{ 番目!!}},\ \cdots,\ a_{n+1}\ \Big|$$

$$\begin{aligned} b_n &= a_n+2n \\ &= \left(\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right)+2n \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n}} \quad \left(=\frac{3n(n+1)}{2}\right) \end{aligned}$$

……**セ～ツ**

であり

$$\frac{1}{b_n}=\frac{2}{3n(n+1)}=\frac{2}{\underline{\underline{3}}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\underline{\underline{1}}}\right)$$

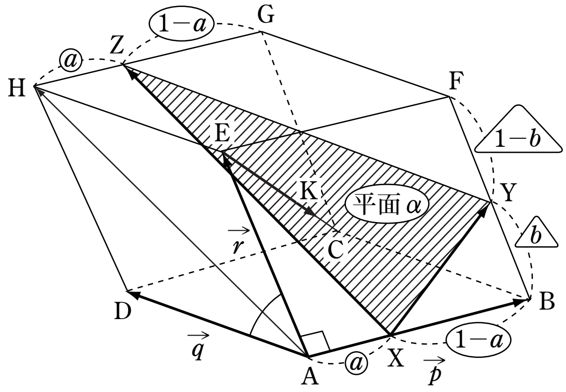
……**テ～ナ**

これより，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k} &= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\} \\ &= \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{n}{n+1} \\ &= \underline{\underline{\frac{2n}{3n+3}}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{aligned}$$

……**ニ～ネ**

第 4 問



(1)

$$
\left.
\begin{aligned}
&|\vec{p}|=|\vec{q}|=|\vec{r}|=1\\
&\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=1\times1\times\cos\frac{\pi}{2}=\underline{\underline{0}}\\
&\vec{q}\cdot\vec{r}=1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
\right)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(*)
$$

……ア

……イ，ウ

である。

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{BY}=(1-a)\overrightarrow{AB}+b\,\overrightarrow{BF}=(1-\underline{\underline{a}})\vec{p}+\underline{\underline{b}}\vec{r}$$ ……エ，オ

$$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{XZ}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AH}\quad（ただし，\overrightarrow{XZ}=\overrightarrow{AH}）$$

$$=(-\vec{r}+\vec{p}+\vec{q})\cdot(\vec{q}+\vec{r})$$

$$=\vec{p}\cdot(\vec{q}+\vec{r})+|\vec{q}|^2-|\vec{r}|^2$$

$$=\underline{\underline{0}}\quad（ただし，\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=0,\ |\vec{q}|=|\vec{r}|=1）$$ ……カ

［（注）　$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{AY}-\overrightarrow{AX}=(\vec{p}+b\vec{r})-a\vec{p}$

$=(1-\underline{\underline{a}})\vec{p}+\underline{\underline{b}}\vec{r}$　…………エ，オ

としてもよい。］

(2)

直線 EC と平面 α が垂直に交わるので

$$\begin{cases} \mathrm{EC} \perp \mathrm{XY} & \cdots\cdots① \\ \quad \text{かつ} & \\ \mathrm{EC} \perp \mathrm{XZ} & \end{cases}$$

①より　$\overrightarrow{\mathrm{EC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{XY}} = 0$

$$(\vec{p} + \vec{q} - \vec{r})\left\{(1-a)\vec{p} + b\vec{r}\right\} = 0$$

これを展開し整理すると，（＊）より

$$(1-a) + \frac{b}{2} - b = 0$$

$\underline{\underline{2}}a + b = \underline{\underline{2}}$　$\cdots\cdots$②　　　　$\cdots\cdots$キ，ク

が成り立つ。

以下，$b = \dfrac{1}{2}$ とする。このとき②より $a = \dfrac{3}{\underline{\underline{4}}}$ である。　　　　$\cdots\cdots$ケ，コ

$\overrightarrow{\mathrm{EK}} = c\,\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ と表すと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AK}} &= \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{EK}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} + c\,\overrightarrow{\mathrm{EC}} \\ &= \vec{r} + c(\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}) \\ &= c\vec{p} + c\vec{q} + (1-c)\vec{r} \quad \cdots\cdots③ \end{aligned}$$

一方，点 K は平面 α 上にあり，$\overrightarrow{\mathrm{XZ}} = \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であるから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AK}} &= \overrightarrow{\mathrm{AX}} + s\overrightarrow{\mathrm{XY}} + t\overrightarrow{\mathrm{XZ}} = \overrightarrow{\mathrm{AX}} + s\overrightarrow{\mathrm{XY}} + t\overrightarrow{\mathrm{AH}} \\ &= a\vec{p} + s\left\{(1-a)\vec{p} + b\vec{r}\right\} + t(\vec{q} + \vec{r}) \end{aligned}$$

である。ゆえに，$a = \dfrac{3}{4}$，$b = \dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AK}} &= \frac{3}{4}\vec{p} + s\left(\frac{1}{4}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{r}\right) + t(\vec{q} + \vec{r}) \\ &= \left(\frac{1}{\underline{\underline{4}}}s + \frac{3}{4}\right)\vec{p} + t\vec{q} + \left(\frac{1}{\underline{\underline{2}}}s + t\right)\vec{r} \quad \cdots\cdots④ \end{aligned}$$

　　　　$\cdots\cdots$ サ，シ

4 点 A，B，D，E は同じ平面上にないので③，④より

$$\begin{cases} c = \dfrac{1}{4}s + \dfrac{3}{4} \\ c = t \\ 1 - c = \dfrac{1}{2}s + t \end{cases}$$

［$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ を 2 通りで表わして係数比較する。］

これらを解いて

$$c = \frac{5}{\underline{\underline{8}}} \quad \left(s = -\frac{1}{2},\ t = \frac{5}{8}\right)$$

　　　　$\cdots\cdots$ス，セ

よって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{EK}}|=\left|\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{EC}}\right|=\frac{5}{8}|\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}|$$

$$=\frac{5}{8}\sqrt{|\vec{p}|^2+|\vec{q}|^2+|\vec{r}|^2+2(\vec{p}\cdot\vec{q}-\vec{q}\cdot\vec{r}-\vec{p}\cdot\vec{r})}$$

$$=\underline{\underline{\frac{5\sqrt{2}}{8}}}$$　　（ただし，(＊)）　　……ソ～チ

となる。