Ⓖ

数　学　②　　数学Ⅱ

（100点　60分）

この問題冊子には，「数学Ⅱ」「数学Ⅱ・数学B」の２科目を掲載しています。解答する科目を間違えないよう選択しなさい。

工業数理基礎，簿記・会計及び情報関係基礎の問題冊子は，大学入試センター試験の出願時に，それぞれの科目の受験を希望した者に配付します。

Ⅰ　注　意　事　項

1　**試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2　出題科目，ページ及び選択方法は，下表のとおりです。

出題科目	ページ	選択方法
数　学　Ⅱ	4～14	左の２科目のうちから１科目を選択し，解答しなさい。
数学Ⅱ・数学B	15～33	

3　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

4　**解答用紙には解答欄以外に次の記入欄があるので，監督者の指示に従って，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。**

①　**受験番号欄**

受験番号（数字及び英字）**を記入**し，さらにその下のマーク欄に**マーク**しなさい。**正しくマークされていない場合は，採点できないことがあります。**

②　**氏名欄，試験場コード欄**

氏名・フリガナ及び**試験場コード**（数字）を**記入**しなさい。

③　**解答科目欄**

解答する科目を一つ選び，科目の下の ◯ に**マーク**しなさい。**マークされていない場合又は複数の科目にマークされている場合は，０点となります。**

5　選択問題については，解答する問題を決めたあと，その問題番号の解答欄に解答しなさい。ただし，**指定された問題数をこえて解答してはいけません。**

6　問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

7　試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

Ⅱ　解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。

Ⅱ 解答上の注意

1 解答は，解答用紙の問題番号に対応した解答欄にマークしなさい。

2 問題の文中の **ア** ， **イウ** などには，特に指示がないかぎり，符号(−)，数字(0～9)，又は文字(a～d)が入ります。**ア**，**イ**，**ウ**，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙の**ア**，**イ**，**ウ**，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例 **アイウ** に$-8a$と答えたいとき

ア	●	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
イ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	●	⑨	ⓐ	ⓑ	ⓒ	ⓓ
ウ	⊖	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	●	ⓑ	ⓒ	ⓓ

なお，同一の問題文中に **ア** ， **イウ** などが2度以上現れる場合，2度目以降は，ア，イウのように細字で表記します。

3 分数形で解答する場合，分数の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例えば，$\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$に$-\dfrac{4}{5}$と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$として答えなさい。

また，それ以上約分できない形で答えなさい。

例えば，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{2a+1}{3}$と答えるところを，$\dfrac{6}{8}$，$\dfrac{4a+2}{6}$のように答えてはいけません。

4 根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$4\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2a}$と答えるところを，$2\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8a}$のように答えてはいけません。

数　　学　　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔1〕　連立方程式

$$(*)\begin{cases} xy = 128 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} = \dfrac{7}{12} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす正の実数 x，y を求めよう。ただし，$x \neq 1$，$y \neq 1$ とする。① の両辺で 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 x + \log_2 y = \boxed{\text{ア}}$$

が成り立つ。これと ② より

$$(\log_2 x)(\log_2 y) = \boxed{\text{イウ}}$$

である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

したがって，$\log_2 x$，$\log_2 y$ は2次方程式

$$t^2 - \boxed{\text{エ}}\,t + \boxed{\text{オカ}} = 0 \qquad \cdots\cdots ③$$

の解である。③の解は $t = \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ は解答の順序を問わない。よって，連立方程式(＊)の解は $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}}\right)$ または $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{コサ}},\ \boxed{\text{ケ}}\right)$ である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で

$$\sin 4\theta = \cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす θ と $\sin\theta$ の値を求めよう。

一般に，すべての x について

$$\cos x = \sin\left(\boxed{\text{シ}} - x\right)$$

である。 $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪ π　　① $\dfrac{\pi}{2}$　　② $-\dfrac{\pi}{2}$

したがって，①が成り立つとき，$\sin 4\theta = \sin\left(\boxed{\text{シ}} - \theta\right)$となり，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で 4θ，$\boxed{\text{シ}} - \theta$ のとり得る値の範囲を考えれば，$4\theta = \boxed{\text{シ}} - \theta$ または $4\theta = \pi - \left(\boxed{\text{シ}} - \theta\right)$となる。よって，①を満たす θ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ または $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{ス}} = \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ である。$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{セソ}}$ の値を求めよう。① より

$$\boxed{ツ}\sin 2\theta\cos 2\theta = \cos\theta$$

となり，この式の左辺を 2 倍角の公式を用いて変形すれば

$$\left(\boxed{テ}\sin\theta - \boxed{ト}\sin^3\theta\right)\cos\theta = \cos\theta$$

となる。ここで $\cos\theta > 0$ であるから

$$\boxed{ト}\sin^3\theta - \boxed{テ}\sin\theta + 1 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つ。$\sin\theta = \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ は ② を満たしている。$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{セソ}}$ とする

と，$\sin\theta \neq \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ であるから

$$\boxed{ナ}\sin^2\theta + \boxed{ニ}\sin\theta - 1 = 0$$

となる。ここで，$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{セソ}} > 0$ より

$$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{セソ}} = \dfrac{\boxed{ヌネ} + \sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$$

である。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

k を実数とし，座標平面上に点 P(1, 0)をとる。曲線

$$y = -x^3 + 9x^2 + kx$$

を C とする。

(1) 点 Q$(t,\ -t^3 + 9t^2 + kt)$ における曲線 C の接線が点 P を通るとすると

$$-\boxed{\text{ア}}\,t^3 + \boxed{\text{イウ}}\,t^2 - \boxed{\text{エオ}}\,t = k$$

が成り立つ。

$$p(t) = -\boxed{\text{ア}}\,t^3 + \boxed{\text{イウ}}\,t^2 - \boxed{\text{エオ}}\,t$$

とおくと，関数 $p(t)$ は $t = \boxed{\text{カ}}$ で極小値 $\boxed{\text{キク}}$ をとり，$t = \boxed{\text{ケ}}$ で極大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

したがって，点 P を通る曲線 C の接線の本数がちょうど 2 本となるのは，k の値が $\boxed{\text{サ}}$ または $\boxed{\text{シス}}$ のときである。また，点 P を通る曲線 C の接線の本数は $k = 5$ のとき $\boxed{\text{セ}}$ 本，$k = -2$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$ 本，$k = -12$ のとき $\boxed{\text{タ}}$ 本となる。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2) $k=0$ とする。曲線

$$y=-x^3+6x^2+7x$$

を D とする。曲線 C と D の交点の x 座標は $\boxed{\text{チ}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，2曲線 C，D および2直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた二つの図形の面積の和は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

第３問 （配点　20）

座標平面上の直線 $y = -x$ を ℓ で表す。２点 A(2, 0), B(2, 2) と直線 ℓ 上の点 P$(s, -s)$ を考える。ただし，$s \neq 2$ とする。

３点 A，B，P を通る円 C の中心 Q は直線 $y = \boxed{\text{ア}}$ 上にある。点 Q の x 座標を t とおき，AQ^2，PQ^2 を s，t を用いて表すと

$$\mathrm{AQ}^2 = t^2 - \boxed{\text{イ}}\, t + \boxed{\text{ウ}}$$

$$\mathrm{PQ}^2 = t^2 - \boxed{\text{エ}}\, st + \boxed{\text{オ}}\, s^2 + \boxed{\text{カ}}\, s + \boxed{\text{キ}}$$

である。

一方，$s \neq t$ のとき，直線 PQ の傾きは

$$\frac{\boxed{\text{ク}} + s}{t - s}$$

である。

（数学Ⅱ第３問は次ページに続く。）

円 C が直線 ℓ と接するときの s の値と円 C の方程式を求めよう。円 C と直線 ℓ が接するとき，直線 PQ と直線 ℓ は垂直であるから

$$\frac{\boxed{\text{ク}}+s}{t-s}=\boxed{\text{ケ}}$$

となり

$$t=\boxed{\text{コ}}\,s+\boxed{\text{サ}}$$

と表せる。さらに，$AQ^2=PQ^2$ であることより

$$s=\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}}$$

となる。ただし，$\boxed{\text{シ}}<\boxed{\text{ス}}$ とする。$s=\boxed{\text{シ}}$ のとき，円 C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{セ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ソ}}\right)^2=\boxed{\text{タ}}$$

であり，また $s=\boxed{\text{ス}}$ のとき，円 C の方程式は

$$\left(x-\boxed{\text{チ}}\right)^2+\left(y-\boxed{\text{ツ}}\right)^2=\boxed{\text{テト}}$$

である。

第4問 （配点　20）

a，b を実数とし，x の3次式

$$P(x) = x^3 - ax^2 - bx - 1 + a + b$$

$$Q(x) = x^3 - 2bx^2 - 4(1 - a - b)x - 8a$$

を考える。

(1)　$P(x)$ と $Q(x)$ を a，b について整理すると

$$P(x) = -\left(x^2 - \boxed{\text{ア}}\right)a - \left(x - \boxed{\text{イ}}\right)b + x^3 - 1$$

$$Q(x) = 4\left(x - \boxed{\text{ウ}}\right)a - 2\left(x^2 - \boxed{\text{エ}}x\right)b + x^3 - 4x$$

であるので

$$P(x) = \left(x - \boxed{\text{オ}}\right)\left\{x^2 + \left(1 - \boxed{\text{カ}}\right)x + 1 - a - b\right\}$$

$$Q(x) = \left(x - \boxed{\text{キ}}\right)\left\{x^2 + 2\left(1 - \boxed{\text{ク}}\right)x + \boxed{\text{ケコ}}\right\}$$

と因数分解される。

（数学Ⅱ第4問は次ページに続く。）

(2) 虚数 α が $P(\alpha)=0$ と $Q(\alpha)=0$ を満たすとき

$$\alpha^2+\left(1-\boxed{\text{カ}}\right)\alpha+1-a-b=0$$

$$\alpha^2+2\left(1-\boxed{\text{ク}}\right)\alpha+\boxed{\text{ケコ}}=0$$

であるので，α は

$$\left(\boxed{\text{サシ}}-a+2b\right)\alpha+1-\boxed{\text{スセ}}-b=0$$

を満たす。ここで，a，b が実数であり，かつ α が虚数であることから

$$a=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}},\quad b=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$$

である。

このとき，方程式 $P(x)=0$ の二つの虚数解の逆数は 2 次方程式

$$x^2+\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}x+\frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}=0$$

の解である。

(下 書 き 用 紙)