

2018 年度大学入試センター試験 解説 〈数学 I・A〉

第 1 問

〔1〕

$$\begin{aligned} \underline{(x+n)(n+5-x)} &= nx+x(5-x)+n^2+5n-nx \\ &= \underline{x(5-x)+n^2+5n} \end{aligned} \quad \text{……ア}$$

破線部において、 $X=x(5-x)$ として、

$$n=1 \text{ とおくと, } (x+1)(6-x)=X+6$$

$$n=2 \text{ とおくと, } (x+2)(7-x)=X+14$$

であるから、

$$\begin{aligned} A &= x(5-x) \times (x+1)(6-x) \times (x+2)(7-x) \\ &= X(X+6)(X+14) \end{aligned} \quad \text{……イ, ウエ}$$

$$\begin{aligned} x = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \text{ のとき, } X &= \frac{5+\sqrt{17}}{2} \times \left(5 - \frac{5+\sqrt{17}}{2} \right) \\ &= \frac{5+\sqrt{17}}{2} \times \frac{5-\sqrt{17}}{2} \\ &= \frac{5^2 - (\sqrt{17})^2}{4} \\ &= \frac{25-17}{4} = \underline{2} \end{aligned} \quad \text{……オ}$$

このとき、 $A=2 \times (2+6) \times (2+14)$

$$= 2^1 \times 2^3 \times 2^4$$

$$= 2^8 \quad \text{……カ}$$

[2]

- (1) 集合 A, B, C をそれぞれ要素を書き並べる方法で表すと,

$$A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

また,

$$\overline{A} = \{3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

- (a) A の要素の中には, C に属さないものもある ($x=1, 5$) から,

「 $A \subset C$ 」は誤り。

- (b) A と B の両方に属する要素はないから,

「 $A \cap B = \phi$ 」は正しい。

よって答えは, (誤・正) の組み合わせで, ②

……キ

- (c) $A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ より,

$$(A \cup C) \cap B = \{6, 12, 18\}$$

よって, 「 $(A \cup C) \cap B = \{6, 12, 18\}$ 」は正しい。

- (d) 分配法則を用いると

$$\begin{aligned} (\overline{A} \cap C) \cup B &= (\overline{A} \cup B) \cap (C \cup B) \\ &= \overline{A} \cap (C \cup B) \quad (\overline{A} \supset B \text{ より}) \end{aligned}$$

「 $(\overline{A} \cap C) \cup B = \overline{A} \cap (B \cup C)$ 」は正しい。

よって答えは, (正・正) の組み合わせで, ①

……ク

- (2) $p: |x-2| > 2 \iff x-2 < -2, 2 < x-2$

$$\iff x < 0, 4 < x$$

$$q: x < 0$$

$$r: x > 4$$

$$s: \sqrt{x^2} > 4 \iff |x| > 4 \iff x < -4, 4 < x$$

以上から,

$$q \text{ または } r: x < 0, 4 < x \iff p$$

であるから, q または r であることは p であるための必要十分条件である。

よって答えは, ②

……ケ

次に, $s \implies r$ は偽 (反例: $x=-5$) であり, $r \implies s$ は真であるから, s は r であるための必要条件であるが十分条件ではない。

よって答えは, ①

……コ

[3]

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a \left\{ x^2 - \frac{2(a+3)}{a}x \right\} - 3a + 21 \\
 &= a \left\{ \left(x - \frac{a+3}{a} \right)^2 - \frac{(a+3)^2}{a^2} \right\} - 3a + 21 \\
 &= a \left\{ x - \frac{a+3}{a} \right\}^2 - \frac{(a+3)^2}{a} - 3a + 21 \\
 &= a \left\{ x - \left(1 + \frac{3}{a} \right) \right\}^2 + \frac{-a^2 - 6a - 9 - 3a^2 + 21a}{a} \\
 &= a \left\{ x - \left(1 + \frac{3}{a} \right) \right\}^2 + \frac{-4a^2 + 15a - 9}{a}
 \end{aligned}$$

よって、放物線 $y=f(x)$ の頂点の x 座標 p は、 $p = \underline{1} + \frac{3}{a}$ ……サ、シ

$a > 0$ より、放物線 $y=f(x)$ は下に凸で、 $p > 1$

よって、 $0 \leq x \leq 4$ における $y=f(x)$ の最小値が $f(4)$ (右端) となると、 $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

このとき、 $p \geq 4$ より、

$$1 + \frac{3}{a} \geq 4 \quad \text{よって、} \quad \frac{3}{a} \geq 3$$

よって、 $0 < a \leq \underline{1}$ ……① ……ス

$0 \leq x \leq 4$ における $y=f(x)$ の最小値が $f(p)$ (頂点) となると、 $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

このとき、 $1 < p \leq 4$ より、

$$1 < 1 + \frac{3}{a} \leq 4 \quad \text{よって、} \quad \frac{3}{a} \leq 3$$

よって、 $\underline{1} \leq a$ ……② ……セ

したがって、 $0 \leq x \leq 4$ における $y=f(x)$ の最小値が 1 であるのは、

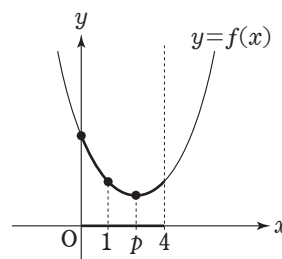
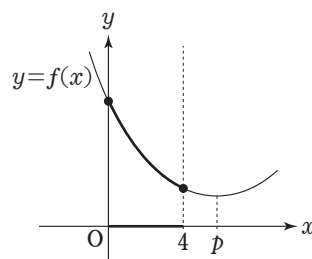
$$\begin{aligned}
 \text{①のとき、} f(4) &= 16a - 8(a+3) - 3a + 21 \\
 &= 5a - 3 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

より、 $a = \frac{4}{\underline{5}}$ (①を満たす。) ……ソ、タ

$$\text{②のとき、} f(p) = \frac{-4a^2 + 15a - 9}{a} = 1$$

$$\text{より、} -4a^2 + 15a - 9 = a \quad 4a^2 - 14a + 9 = 0$$

②を満たす a の値は、 $a = \frac{7 + \sqrt{13}}{\underline{4}}$ ……チ、ツテ、ト

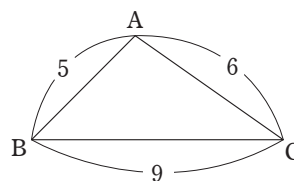


第2問

〔1〕

△ABC は右図のようになるから、余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos\angle ABC &= \frac{AB^2 + BC^2 - CA^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \\ &= \frac{5^2 + 9^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 9} \\ &= \frac{70}{2 \cdot 5 \cdot 9} = \underline{\underline{\frac{7}{9}}}\end{aligned}$$



……ア, イ

よって、 $\sin\angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2\angle ABC}$

$$\begin{aligned}&= \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{32}{81}} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{2}}{9}}}\end{aligned}$$

……ウ, エ, オ

このとき、 $AB \cdot \sin\angle ABC = 5 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{20\sqrt{2}}{9} > \frac{20 \times 1.4}{9} > 3.1 > 3 = CD$

より、 $CD < \underline{AB \cdot \sin\angle ABC}$ であるから、答えは、④

……カ

このとき、上の破線部は右図の h であるから、BC から見た

D の高さは、A の高さより小さい。

よって、 $AD \parallel BC$ とはなり得ないから、

$AB \parallel CD$

よって答えは、④

……キ

このとき、右図のようになり、 $\angle BCD = 180^\circ - \angle ABC$

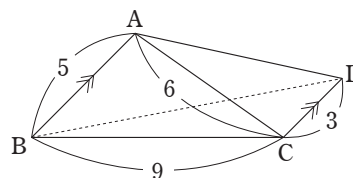
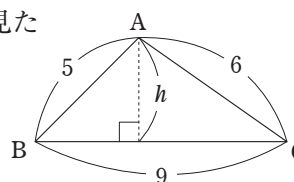
であるから、 $\cos\angle BCD = -\cos\angle ABC = -\frac{7}{9}$

△BCD にて余弦定理より、

$$\begin{aligned}BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos\angle BCD \\ &= 9^2 + 3^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) = 132\end{aligned}$$

よって、 $BD = \sqrt{132} = \underline{\underline{2\sqrt{33}}}$

……ク, ケコ



〔2〕

- (1) ①～⑥のそれぞれについて、正誤を調べる。

以下、「男子長距離」のグループを「男長」などと表す。

- ①…各グループの範囲は、

$$\text{男短} \cdots 202 - 152 = 50, \text{男長} \cdots 198 - 155 = 43,$$

$$\text{女短} \cdots 187 - 145 = 42, \text{女長} \cdots 186 - 151 = 35$$

であるから、最も大きいのは、男短である。 → 誤

- ②…四分位範囲（第3四分位数－第1四分位数）は、

$$\text{男短} \cdots 186 - 176 = 10, \text{男長} \cdots 181 - 172 = 9,$$

$$\text{女短} \cdots 174 - 165 = 9, \text{女長} \cdots 170 - 161 = 9$$

であるから、すべて12未満である。 → 正

- ③…男長の度数最大の階級は、170以上175未満であり、中央値は176である。 → 誤

- ④…女長の度数最大の階級は、165以上170未満であり、第1四分位数は161である。 → 誤

- ⑤…最も高い身長は、男短の202である。 → 誤

- ⑥…最も低い身長は、女短の145である。 → 誤

- ⑦…男短の中央値は181であり、男長の第3四分位数も181である。 → 正

以上により、答えは、①, ⑥

……サ, シ

- (2) $Z = \frac{W}{X}$ は、散布図の各点と原点を結ぶ直線の傾きの値であるから、 $l_1 \sim l_4$ の傾きと比較して、

各グループにおける Z の値の最大値を比べると、

$$\text{女長} < \text{女短} < \text{男長} < \text{男短}$$

であることが読み取れる。

よって、 Z の箱ひげ図において、

(d)…女長, (b)…女短, (c)…男長, (a)…男短

である。

これをもとに、①～⑤の正誤を調べる。

- ①…四つのグループのすべてにおいて、 X が増加すると W も増加する傾向、つまり正の相関がある。 → 誤

- ②… Z の中央値が一番大きいのは、(a)つまり男短である。 → 誤

- ③… Z の範囲が最小なのは、明らかに(d)つまり女長である。 → 誤

- ④…男短つまり(a)の四分位範囲は、ほかと比べて明らかに大きい。 → 誤

- ⑤…女長つまり(d)の Z の最大値は、25より小さい。 → 正

- ⑥…上記破線部の通り。 → 正

以上により、答えは、④, ⑤

……ス, セ

$$(3) \quad (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \overline{w} = n \overline{x} \times \overline{w} = n \overline{x} \overline{w} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と同様に,

$$(w_1 + w_2 + \cdots + w_n) \overline{x} = n \overline{w} \times \overline{x} = n \overline{x} \overline{w} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

このとき,

$$\begin{aligned} & (x_1 - \overline{x})(w_1 - \overline{w}) + (x_2 - \overline{x})(w_2 - \overline{w}) + \cdots + (x_n - \overline{x})(w_n - \overline{w}) \\ &= x_1 w_1 - x_1 \overline{w} - w_1 \overline{x} + \overline{x} \overline{w} \\ & \quad + x_2 w_2 - x_2 \overline{w} - w_2 \overline{x} + \overline{x} \overline{w} \\ & \quad + \cdots \\ & \quad + x_n w_n - x_n \overline{w} - w_n \overline{x} + \overline{x} \overline{w} \\ &= (x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \overline{w} \\ & \quad - (w_1 + w_2 + \cdots + w_n) \overline{x} + n \overline{x} \overline{w} \\ &= (x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n) - n \overline{x} \overline{w} - n \overline{x} \overline{w} + n \overline{x} \overline{w} \\ & \hspace{15em} (\text{なぜなら } \textcircled{1}, \textcircled{2}) \\ &= (x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n) - n \overline{x} \overline{w} \end{aligned}$$

よって答えは, ②

.....ソ

第3問

大小2個のさいころを投げたときの目の組は全部で 6^2 通りあり、それぞれは同様に確からしい。

以下、大きいさいころに p 、小さいさいころに q の目が出る場合を、 (p, q) と表すことにする。

$$(1) \quad P(A) = \frac{1}{\underline{\underline{6}}} \quad \dots\dots \text{ア, イ}$$

2個のさいころの出た目の和が7である場合は、

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$$

$$\text{の6通りであるから, } P(B) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{\underline{\underline{6}}} \quad \dots\dots \text{ウ, エ}$$

2個のさいころの出た目の和が9である場合は、

$$(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$$

$$\text{の4通りであるから, } P(C) = \frac{4}{6^2} = \frac{1}{\underline{\underline{9}}} \quad \dots\dots \text{オ, カ}$$

(2) $C \cap A$ が起こる場合は、 $(4, 5)$ の1通りであるから、

$$P(C \cap A) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} (= P(A \cap C))$$

$$\text{よって, } P_c(A) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)} = \frac{1}{36} \div \frac{1}{9} = \frac{1}{\underline{\underline{4}}} \quad \dots\dots \text{キ, ク}$$

$$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{1}{36} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{\underline{\underline{6}}} \quad \dots\dots \text{ケ, コ}$$

(3) $A \cap B$ が起こる場合は、 $(4, 3)$ の1通りであるから、

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$\text{一方, } P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

よって、 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ であるから、答えは、① ……サ

$A \cap C$ が起こる場合は、 $(4, 5)$ の1通りであるから、

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$\text{一方, } P(A)P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{54}$$

よって、 $P(A \cap C) > P(A)P(C)$ であるから、答えは、② ……シ

(4) 1回目の事象と2回目の事象は独立である。

$\overline{A} \cap C$ が起こる場合は、 $(3, 6), (5, 4), (6, 3)$ の3通りであるから、

$$P(\overline{A} \cap C) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

よって、求める確率は、 $P(A \cap B)P(\overline{A} \cap C) = \frac{1}{6^2} \cdot \frac{3}{6^2} = \frac{3}{6^4} = \frac{1}{\underline{\underline{432}}}$ ……(*) ……ス, セソタ

さて、 B と C は互いに排反である（同時には起こり得ない）から、3つの事象 A , B , C がいずれも1回ずつ起こる場合は、1回目と2回目の事象の組み合わせが、

$$\textcircled{ア} \cdots (A \cap B, \overline{A} \cap C)$$

$$\textcircled{イ} \cdots (A \cap C, \overline{A} \cap B)$$

のいずれかの場合（1回目と2回目の順は逆でもよい…☆）である。

⑦のとき、求める確率は(*)である。

①のとき、 $\overline{A} \cap B$ が起こる場合は、(1, 6), (2, 5), (3, 4), (5, 2), (6, 1) の5通りであるから、

$$P(A \cap C, \overline{A} \cap B) = P(A \cap C)P(\overline{A} \cap B) = \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5}{6^2}$$

よって、求める確率は、（☆も考慮すると）

$$\left(\frac{1}{6^2} \cdot \frac{3}{6^2} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5}{6^2} \right) \times 2 = \frac{(3+5) \times 2}{6^2 \times 6^2} = \frac{1}{\underline{\underline{81}}} \quad \text{……チ, ツテ}$$

第4問

- (1) 右の計算により, $144 = 2^4 \times 3^2$

……ア, イ, ウ

よって, 144 の正の約数の個数は,

$$(4+1)(2+1) = \underline{15} \text{ (個)}$$

……エオ

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)144} \\ 2 \overline{)72} \\ 2 \overline{)36} \\ 2 \overline{)18} \\ 3 \overline{)9} \\ 3 \end{array}$$

- (2) $144x - 7y = 1$ ……① を満たす整数 x, y の組の 1 つに

$$x = 2, y = 41$$

がある。つまり,

$$144 \cdot 2 - 7 \cdot 41 = 1 \quad \text{……②}$$

①-②をつくと,

$$144(x-2) - 7(y-41) = 0$$

$$\text{よって, } 144(x-2) = 7(y-41)$$

ここで, 144 と 7 は互いに素であるから, k を整数として,

$$x-2 = 7k, y-41 = 144k$$

とおくことができる。これより,

$$x = \underline{7k+2}, y = \underline{144k+41}$$

……ケ, コサシ

x の絶対値が最小となるのは, $k=0$ とした場合で,

$$x = \underline{2}, y = \underline{41}$$

……カ, キク

- (3) 144 の倍数で, 7 で割ったら余りが 1 となる自然数は,

$$144x = 7y+1 \text{ (} x, y \text{ は自然数で, } x = 7k+2 \text{ と表せる)}$$

と表せるから, これより

$$2^4 \times 3^2 \times x = 7y+1$$

$144x$ の正の約数の個数が 18 個のとき, x の素因数に 2, 3 以外の素数を含めると, $2^4 \times 3^2 \times x$ の約数の個数は, $(4+1)(2+1)(1+1) = 30$ (個) 以上となるから, x は素因数 2 または 3 のみをもつ。

そこで, $k=0$ として $x=2$ とすると,

$$144x = 2^5 \times 3^2$$

となり, 約数の個数は, $(5+1)(2+1) = 18$ (個) となる。

$$\text{よって答えは, } x = \underline{2}$$

……ス

次に, $144x$ の正の約数の個数が 30 個のとき, x が素因数 2 または 3 のみをもつとすると,

$$x = 3^3 = 27 \text{ のとき, } 144x = 2^4 \times 3^5$$

$$x = 2^5 = 32 \text{ のとき, } 144x = 2^9 \times 3^2$$

$$x = 2 \times 3^2 = 18 \text{ のとき, } 144x = 2^5 \times 3^4$$

が考えられるが, どの x も $7k+2$ の形では表せない。

一方, x が 2, 3 以外の素数であるときも, 正の約数の個数は 30 個となるから, そのうち $7k+2$ の形で表される最小の数は,

$$\underline{23} (= 7 \times 3 + 2)$$

……セソ

第5問

△ABC および点 D, 点 E は右図のようになる (点線の円は D で BC と接している)。

ここに, $BC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ である。

角の二等分線の性質より,

$$BD : DC = BA : AC = 2 : 1$$

$$\text{であるから, } BD = \frac{2}{2+1}BC = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

さらに, 方べきの定理より,

$$AB \cdot BE = BD^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{20}{9}$$

$$\text{これより, } 2BE = \frac{20}{9}$$

$$\text{よって, } BE = \frac{10}{9}$$

$$\text{次に, } \frac{BE}{BD} = \frac{10}{9} \cdot \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{5\sqrt{5}}{15}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{15} \text{ より,}$$

$$\frac{BE}{BD} < \frac{AB}{BC} \quad \dots\dots ①$$

$$(\dots\dots \textcircled{0})$$

ここで, BC 上に点 I を, $EI \parallel AC$ となるようにとると,

$$\frac{BE}{BI} = \frac{AB}{BC}$$

$$\text{であるから, これと①より, } \frac{BE}{BD} < \frac{BE}{BI}$$

これより, $BD > BI$ となるから, D は I より C 寄りにある。

よって, AC と DE の交点は, 辺 AC の端点 C (……④) の側の延長上にある。

以上を図示すると, 右図のようになるから,

メネラウスの定理より,

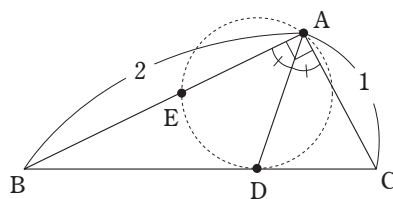
$$\frac{CF}{FA} \cdot \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$$

これより,

$$\frac{CF}{AF} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{1} = 1$$

$$\text{よって, } \frac{CF}{AF} = \frac{5}{8}$$

$$\text{これより, } CF = \frac{5}{8-5}AC = \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}$$



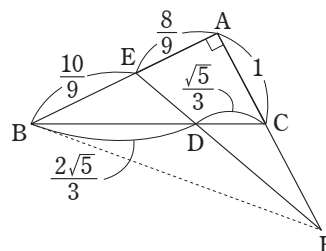
……ア, イ, ウ

……エオ, カ

……キク, ケ

……コ

……サ



……シ, ス

……セ, ソ

東進ハイスクール 東進衛星予備校

このとき、 $\triangle ABF$ にて三平方の定理より、

$$BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = \sqrt{2^2 + \left(1 + \frac{5}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}$$

であるから、 $AF : FB = \left(1 + \frac{5}{3}\right) : \frac{10}{3} = 4 : 5 = AE : EB$ が成り立つ。

これは、 FE が $\angle AFB$ の二等分線であることを示すから、 D は $\angle BAF$ 、 $\angle AFB$ の二等分線の交点、つまり $\triangle ABF$ の内心である。

よって答えは、①

……タ