2019 年度大学入試センター試験 解説〈数学Ⅰ・A〉

第 1 問

〔1〕

$$9a^2-6a+1=(\underline{\underline{3}}a-\underline{\underline{1}})^2$$ ……ア，イ

よって，

$$A=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|$$
$$=|3a-1|+|a+2|$$

となる。

次に，a の値によって場合分けして，絶対値をはずして A を求める。

㋐　$a>\dfrac{1}{3}$ のとき，$3a-1>0$，$a+2>0$ であるから，

$$A=(3a-1)+(a+2)=\underline{\underline{4}}a+\underline{\underline{1}}$$ ……ウ，エ

㋑　$-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$3a-1\leqq0$，$a+2\geqq0$ であるから，

$$A=-(3a-1)+(a+2)=\underline{\underline{-2}}a+\underline{\underline{3}}$$ ……オカ，キ

㋒　$a<-2$ のとき，$3a-1<0$，$a+2<0$ であるから，

$$A=-(3a-1)-(a+2)=-4a-1$$

よって，$A=2a+13$ のとき，

㋐　$4a+1=2a+13$ より，$a=6$

これは $a>\dfrac{1}{3}$ を満たす。

㋑　$-2a+3=2a+13$ より，$a=-\dfrac{5}{2}$

これは $-2\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$ を満たさない。

㋒　$-4a-1=2a+13$ より，$a=-\dfrac{7}{3}$

これは $a<-2$ を満たす。

以上から，$A=2a+13$ となる a の値は，

$$a=\underline{\underline{6}},\ \underline{\underline{\dfrac{-7}{3}}}$$ ……ク，ケコ，サ

〔2〕

p：m と n はともに奇数である

q：$3mn$ は奇数である $\Longleftrightarrow$ m と n はともに奇数である $\Longleftrightarrow$ p　……①

r：$m+5n$ は偶数である $\Longleftrightarrow$ $\left.\begin{array}{c}(m,\ n \text{ はともに偶数}) \\ \text{または} \\ (m,\ n \text{ はともに奇数})\end{array}\right\}$　……②

さらに，

$\overline{p}$：（m は偶数）または（n は偶数）　……③

と整理することができる。

(1)　$\overline{p}$ は，（m，n の少なくとも一方は偶数である）ということであるから，

m が奇数ならば n は偶数である。（……0）　……シ

また，

m が偶数ならば n は偶数でも奇数でもよい。（……2）　……ス

(2)　①より，p と q は同値であるから，

p は q であるための必要十分条件である。（……0）　……セ

次に，②より，「p ならば r」は真であるが，「r ならば p」は偽である。よって，

p は r であるための十分条件であるが，必要条件ではない。（……2）　……ソ

さらに，②と③より，「$\overline{p}$ ならば r」は偽，「r ならば $\overline{p}$」も偽である。よって，

$\overline{p}$ は r であるための必要条件でも十分条件でもない。（……3）　……タ

〔3〕

$$y=x^2-(b-2a)x+a^2+1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$=\left(x-\frac{b-2a}{2}\right)^2-\left(\frac{b-2a}{2}\right)^2+a^2+1$$

$$=\left\{x-\left(\frac{b}{2}-a\right)\right\}^2-\frac{b^2-4ab+4a^2}{4}+a^2+1$$

$$=\left\{x-\left(\frac{b}{2}-a\right)\right\}^2-\frac{b^2}{4}+ab+1 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1)　②より，グラフ G の頂点の座標は，$\left(\frac{b}{\underline{\underline{2}}}-a,\ -\frac{b^2}{\underline{\underline{4}}}+ab+\underline{\underline{1}}\right)$ ……③　　……チ，ツ，テ

(2)　グラフ G が点 $(-1,\ 6)$ を通るとき，①より，

$$6=(-1)^2-(b-2a)\cdot(-1)+a^2+1$$

これより，$6=1+b-2a+a^2+1$

よって，$b=-a^2+2a+4=-(a-1)^2+5$ となるから，

b のとり得る値の最大値は $\underline{\underline{5}}$　　……ト

であり，

そのときの a の値は $\underline{\underline{1}}$　　……ナ

このときのグラフ G の頂点の座標は，③より，

$$\left(\frac{5}{2}-1,\ -\frac{5^2}{4}+1\cdot5+1\right)$$

すなわち，

$$\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{4}\right)$$

であるから，このときのグラフ G は，$y=x^2$ のグラフを

x 軸方向に $\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$　　……ニ，ヌ

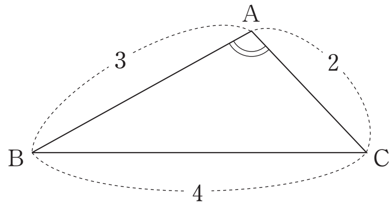
y 軸方向に $\underline{\underline{\frac{-1}{4}}}$　　……ネノ，ハ

だけ平行移動したものである。

第 2 問

〔1〕

右の図において，余弦定理より，



$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{-1}{4}$$ ……アイ，ウ

であり，$\cos\angle\mathrm{BAC}<0$ であるから，

$$\angle\mathrm{BAC}>90^\circ$$

すなわち，$\angle\mathrm{BAC}$ は鈍角である。(……②) ……エ

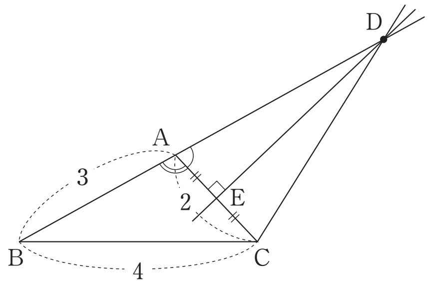
また，

$$\sin\angle\mathrm{BAC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$ ……オカ，キ

ここで，$\angle\mathrm{BAC}$ が鈍角であることから，右図のように点 D は辺 AB の A の側の延長上にあり，

$$\cos\angle\mathrm{CAD}=\cos(180^\circ-\angle\mathrm{BAC})$$

$$=-\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{4}$$ ……ク，ケ



よって，AC の垂直二等分線と AC の交点を E とすると，

$$\cos\angle\mathrm{CAD}=\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}=\frac{1}{\mathrm{AD}}=\frac{1}{4}$$

より，

$$\mathrm{AD}=4$$ ……コ

また，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

さらに，

$$\triangle\mathrm{DBC}:\triangle\mathrm{ABC}=\mathrm{DB}:\mathrm{AB}=(4+3):3=7:3$$

よって，

$$\triangle\mathrm{DBC}=\frac{7}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{7}{3}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{4}=\frac{7\sqrt{15}}{4}$$ ……サ，シス，セ

〔2〕

(1)　箱ひげ図を見ると，2013 年の開花日のデータの最小値は 70 日以上 75 日未満，最大値は 135 日以上 140 日未満であるから，それを満たすヒストグラムは，③　……ソ

2017 年の最小値は 80 日以上 85 日未満，最大値は 120 日以上 125 日未満であるから，それを満たすヒストグラムは，④　……タ

(2)

⓪…**図 3** の箱ひげ図より，モンシロチョウの初見日の最小値はツバメの初見日の最小値と同じであり，正しい。

①…**図 3** の箱ひげ図より，モンシロチョウの初見日の最大値はツバメの初見日の最大値より大きく，正しい。

②…**図 3** の箱ひげ図より，モンシロチョウの初見日の中央値はツバメの初見日の中央値より大きく，正しい。

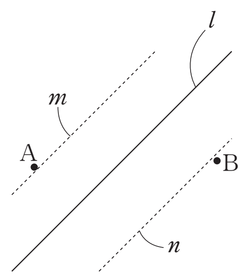
③…**図 3** の箱ひげ図より，モンシロチョウの初見日の四分位範囲はおよそ (103－83＝)20 (日) で，ツバメの初見日の四分位範囲，およそ (97－88＝)9 (日) の 3 倍より小さく，正しい。

④…**図 3** の箱ひげ図より，モンシロチョウの初見日の第 1 四分位数は 85 日未満，第 3 四分位数は 100 日より大であるから，四分位範囲は (100－85＝) 15 日より大きく，正しくない。

⑤…**図 3** の箱ひげ図より，ツバメの初見日の第 1 四分位数は 85 日より大で，第 3 四分位数は 100 日未満であるから，四分位範囲は (100－85＝)15 日より小さく，正しい。

⑥…**図 4** の散布図において，モンシロチョウとツバメの初見日が同じ所は右図の直線 l 上にある点で，4 点あることが確認できるので，初見日が同じ所が少なくとも 4 地点あり，正しい。

⑦…**図 4** の散布図において，モンシロチョウとツバメの初見日で，右図の直線 m より上方の点，および直線 n より下方の点は，初見日の差が 15 日より大きく，正しくない。(右図の点 A，B)



以上より，正しくないものは，④ と ⑦　……チ，ツ(順不同)

(3)

• $x_1-\overline{x}$，$x_2-\overline{x}$，……，$x_n-\overline{x}$ の平均値は，

$$\frac{(x_1-\overline{x})+(x_2-\overline{x})+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}-\frac{n\overline{x}}{n}$$

$$=\overline{x}-\overline{x}=0 \quad (\cdots\cdots ⓪)$$　……テ

• X' の平均値 $\overline{x'}$ は，x_1'，x_2'，……，x_n' の平均値，すなわち，

$\dfrac{x_1-\overline{x}}{s}$，$\dfrac{x_2-\overline{x}}{s}$，……，$\dfrac{x_n-\overline{x}}{s}$ の平均値であるから，

$$\frac{0}{s}=0 \quad (\cdots\cdots ⓪)$$　……ト

• X' の分散は，$(x_1'-\overline{x'})^2$，$(x_2'-\overline{x'})^2$，……，$(x_n'-\overline{x'})^2$ の平均値であり，$\overline{x'}=0$ であったから，$(x_1')^2$，$(x_2')^2$，……，$(x_n')^2$ の平均値に等しい。

これは，$\left(\dfrac{x_1-\overline{x}}{s}\right)^2$，$\left(\dfrac{x_2-\overline{x}}{s}\right)^2$，……，$\left(\dfrac{x_n-\overline{x}}{s}\right)^2$ の平均値，すなわち，

$(X$ の分散$)\times\dfrac{1}{s^2}=s^2\times\dfrac{1}{s^2}=1$ に等しい。

よって，X' の標準偏差は，

$\sqrt{1}=1$　(……①)　……ナ

ここで，$x_i'=\dfrac{1}{s}x_i-\dfrac{\overline{x}}{s}$ より，x_i' は x_i の 1 次関数$\left(傾きは\ \dfrac{1}{s}>0\right)$であるから，$M'$ と T' の散布図の各点の値の大小関係は M と T の散布図と同じになる。よって，⓪と②が適合する。

一方，X' の分散は 1 であるから，$(x_i'-\overline{x'})^2$ の平均は 1 であり，これと $\overline{x'}=0$ より，$(x_i')^2$ の平均は 1 である。よって，$|x_i'|>1$ となる x_i' が存在し，M' と T' の散布図の縦軸と横軸の目盛りで適合するのは②と③である。

よって，M' と T' の散布図として適合するものは，②　……ニ

第３問

(1)　１回目の操作で，

赤い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は，

$$\frac{4}{6}\times\frac{2}{3}=\underline{\underline{\frac{4}{9}}}$$ ……ア，イ

白い袋が選ばれ赤球が取り出される確率は，

$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$ ……ウ，エ

(2)　２回目の操作が白い袋で行われるのは，１回目の操作で白球が取り出される場合で，その確率は，(1)の余事象の確率を求めて，

$$1-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\right)=\underline{\underline{\frac{7}{18}}}\quad\cdots\cdots①$$ ……オ，カキ

(3)　１回目の操作で白球を取り出す確率を p とすると，１回目の操作で赤球を取り出す確率は $1-p$

２回目の操作で白球が取り出されるのは，

「１回目に白球を取り出し，その後白い袋から白球を取り出す」

または，

「１回目に赤球を取り出し，その後赤い袋から白球を取り出す」

場合であるから，求める確率は，

$$p\times\frac{1}{2}+(1-p)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{\underline{\underline{6}}}p+\frac{1}{3}$$ ……ク，ケ

よって，①より，$p=\frac{7}{18}$ であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{7}{18}+\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{43}{108}}}\quad\cdots\cdots②$$ ……コサ，シスセ

２回目の操作で白球を取り出す確率を q とすると，３回目の操作で白球が取り出される確率は，上記と同様に考えて，

$$\frac{1}{6}q+\frac{1}{3}$$

と表される。

よって，②より，$q=\frac{43}{108}$ であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{43}{108}+\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{259}{648}}}\quad\cdots\cdots③$$ ……ソタチ，ツテト

(4)　２回目の操作で取り出した球が白球である事象を A，２回目に球を取り出した袋の色が白である事象を B とする。

$$P(A\cap B)=\frac{7}{18}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{36},$$

$$P(A)=\frac{43}{108}$$

であるから，求める確率は，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{7}{36}\times\frac{108}{43}=\underline{\underline{\frac{21}{43}}}$$ ……ナニ，ヌネ

また，3回目の操作で取り出した球が白球である事象を C，3回目にはじめて白球を取り出す事象を D とする。

$P(C\cap D)$ は，1回目に赤球を，2回目に赤球を，3回目に白球を取り出す確率であるから，

$$P(C\cap D)=\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{81}$$

一方，③より，$P(C)=\frac{259}{648}$ であるから，求める確率は，

$$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{11}{81}\times\frac{648}{259}=\underline{\underline{\frac{88}{259}}}$$ ……ノハ，ヒフヘ

第 4 問

(1)　　$49x-23y=1$　……①

$49=m$，$23=n$ とすると，

$49=23\cdot 2+3$ より，$3=49-23\cdot 2=m-2n$

$23=3\cdot 7+2$ より，　$2=23-3\cdot 7=n-(m-2n)\cdot 7=-7m+15n$

$3=2\cdot 1+1$ より，　$1=3-2\cdot 1=(m-2n)-(-7m+15n)\cdot 1=8m-17n$

これより，

$49\cdot 8-23\cdot 17=1$　……②

①－②より，

$49(x-8)-23(y-17)=0$

$49(x-8)=23(y-17)$

49 と 23 は互いに素であるから，k を整数として，

$x-8=23k$，$y-17=49k$

と表される。よって，

$x=\underline{\underline{23}}k+8$，$y=\underline{\underline{49}}k+17$　……エオ，カキ

これを満たす最小の自然数 x は，$k=0$ としたときの $x=\underline{\underline{8}}$　……ア

このとき，$y=\underline{\underline{17}}$　……イウ

(2)　$49x-23y=-1$ を満たす自然数 x，y は，(1)の結果から，

$x=23k-8$，$y=49k-17$

と表される。

これを満たす最小の自然数 x は，$k=1$ としたときの $x=15$ であり，(1)と比べると，

x の最小値は $x=8$

よってこのとき，

$(A,\ B)=(49\times\underline{\underline{8}},\ 23\times\underline{\underline{17}})$　……ク，ケコ

次に，$|49x-23y|=2$，すなわち，$49x-23y=2$，または $49x-23y=-2$ を満たす最小の自然数 x をそれぞれ考える。

$49x-23y=2$ を満たす整数 x，y は，

$x=23k+8\cdot 2=23k+16$，$y=49k+17\cdot 2=49k+34$

と表されるから，最小の自然数 x は，$k=0$ としたときの $x=16$（このとき $y=34$）

$49x-23y=-2$ を満たす整数 x，y は，

$x=23k-16$，$y=49k-34$

と表されるから，最小の自然数 x は，$k=1$ としたときの $x=7$（このとき $y=15$）

以上により，最小の自然数 x は $x=7$ で，このとき，

$(A,\ B)=(49\times\underline{\underline{7}},\ 23\times\underline{\underline{15}})$　……サ，シス

(3) a が奇数のとき，a と $a+2$ は互いに素，すなわち，最大公約数は 1 であり，a が偶数のとき，$a+2$ も偶数であるから，a と $a+2$ の最大公約数は 2

すなわち，a と $a+2$ の最大公約数は 1 または $\underline{\underline{2}}$ ……セ

ここで，a，$a+1$，$a+2$ は連続する 3 整数であるから，少なくとも 1 つが 2 で割り切れ，少なくとも 1 つが 3 で割り切れる。

よって，$a(a+1)(a+2)$ は必ず $2\times3=6$ で割り切れる。

また，$a=1$ のとき，

$$a(a+1)(a+2)=1\cdot2\cdot3=6$$

であり，6 より大きな整数では割り切れない。

以上より，条件がすべての自然数 a で成り立つような自然数 m のうち，最大のものは，

$m=\underline{\underline{6}}$ ……ソ

(4) $6762=2\times\underline{\underline{3}}\times7^{\underline{\underline{2}}}\times\underline{\underline{23}}$ ……タ，チ，ツテ

$b(b+1)(b+2)$ が 6762 の倍数であるとき，b，$b+1$，$b+2$ のいずれかは $7^2=49$ の倍数であり，いずれかは 23 の倍数である。

b，$b+1$，$b+2$ のうち，49 の倍数であるものを A，23 の倍数であるものを B とすると，$|A-B|$ は 0，1，2 いずれかの値をとる。

㋐ $|A-B|=0$，すなわち，$A=B$ のとき，

b の最小値は，

$b+2=49\times23$　すなわち，$b=1125$

㋑ $|A-B|=1$，すなわち，$A-B=1$ または $A-B=-1$ のとき，

(2)より，A が最小になるのは，$(A, B)=(49\times8, 23\times17)$

よって，このとき，$A-B=1$ で，b の最小値は，

$b+2=49\times8$　すなわち，$b=390$

㋒ $|A-B|=2$，すなわち，$A-B=2$ または $A-B=-2$ のとき，

(2)より，A が最小になるのは，$(A, B)=(49\times7, 23\times15)$

よって，このとき，$A-B=-2$ で，b の最小値は，

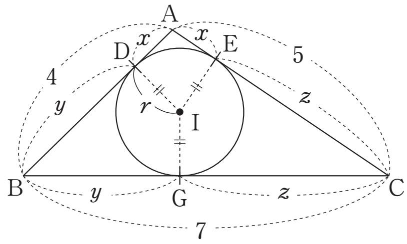
$b+2=23\times15$　すなわち，$b=343$

以上，㋐，㋑，㋒より，求める b の値は，

$b=\underline{\underline{343}}$ ……トナニ

第５問

条件を満たす点は右図のようになる。



$\triangle$ABC の内接円の半径を r とする。

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\sin\angle \mathrm{BAC}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}\quad \cdots\cdots①$$

一方，$\triangle \mathrm{ABC}=\triangle \mathrm{IAB}+\triangle \mathrm{IBC}+\triangle \mathrm{ICA}$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4r+\frac{1}{2}\cdot 7r+\frac{1}{2}\cdot 5r=8r\quad \cdots\cdots②$$

よって，①＝②より，

$$8r=4\sqrt{6}\quad \text{すなわち，}\ r=\underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}}$$ ……ア，イ

次に，円外の点から円に引いた２本の接線の長さは等しいから，内接円と辺 BC の接点を G とすると，$\mathrm{AD}=\mathrm{AE}=x$，$\mathrm{BD}=\mathrm{BG}=y$，$\mathrm{CE}=\mathrm{CG}=z$ とおけ，

$$\begin{cases}\mathrm{AB}=x+y=4 & \cdots\cdots③\\ \mathrm{BC}=y+z=7 & \cdots\cdots④\\ \mathrm{CA}=z+x=5 & \cdots\cdots⑤\end{cases}$$

③＋④＋⑤より，

$$2(x+y+z)=16\quad \text{すなわち，}\ x+y+z=8$$

であるから，これと④より，

$$\mathrm{AD}=x=\underline{\underline{1}}$$ ……ウ

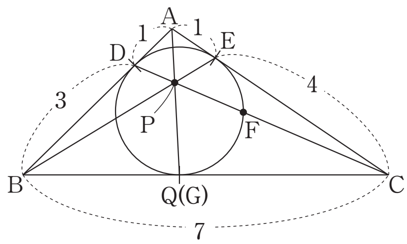
また，$\triangle$ADE で余弦定理を用いると，

$$\mathrm{DE}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{AE}^2-2\mathrm{AD}\cdot \mathrm{AE}\cos\angle \mathrm{BAC}=1^2+1^2-2\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{12}{5}$$

よって，

$$\mathrm{DE}=\sqrt{\frac{60}{25}}=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{15}}{5}}}$$ ……エ，オカ，キ

さらに，チェバの定理より，



$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1$$

であり，③，④，⑤より，CE＝4，DB＝3 であるから，

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{CQ}}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

よって，

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{CQ}}=\underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$ ……ク，ケ

BC＝7 であるから，

$$\mathrm{BQ}=\frac{3}{3+4}\mathrm{BC}=\underline{\underline{3}}$$ ……コ

これより，BQ＝BD であるから，点 Q は内接円と辺 BC との接点 (G) と一致する。

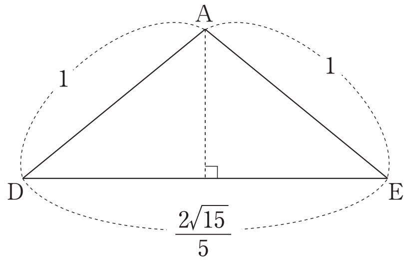
よって，

$$\mathrm{IQ}=\mathrm{IG}=r=\underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}}$$ ……サ，シ

また，接線と弦のつくる角の定理(接弦定理)より，

$$\angle\mathrm{DFE}=\angle\mathrm{DEA}$$

であり，右図より，



$$\cos\angle\mathrm{DEA}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

であるから，

$$\cos\angle\mathrm{DFE}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{15}}{5}}}$$ ……スセ，ソ

(注)　△ADE で余弦定理を用いて，cos∠AED の値を求めることもできる。また，$\angle\mathrm{DFE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{DIE}$ であるから，△IED で余弦定理を用いて cos∠DIE の値を求め，その後に半角の公式(⇨数学Ⅱ)を用いて cos∠DFE の値を求めることもできる。