

2020 年度大学入試センター試験 解説 〈数学Ⅱ・B〉

第1問

〔1〕

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき,

$$\sin\theta > \sqrt{3} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad \dots\dots\text{①}$$

の右辺に対して, 加法定理を用いると,

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} \left(\cos\theta \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta \cdot \sin\frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta + \frac{3}{2} \sin\theta \quad \dots\dots\text{ア, イ, ウ} \end{aligned}$$

である。

ここで①は,

$$\sqrt{3} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\theta < 0$$

つまり,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta + \frac{3}{2} \sin\theta - \sin\theta < 0$$

より,

$$\frac{1}{2} \sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta < 0 \quad \dots\dots\text{②}$$

と表せることに注意する。

②について三角関数の合成を用いると,

$$\sin\theta \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta \cdot \sin\frac{\pi}{3} < 0$$

つまり,

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) < 0 \quad \dots\dots\text{③} \quad \dots\dots\text{エ}$$

と変形できる。

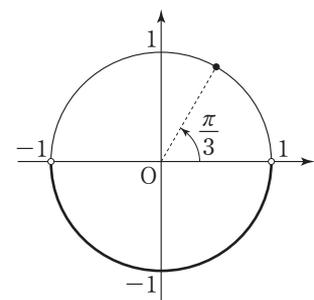
$$0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{より,} \quad \frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} < \frac{7}{3}\pi \quad \dots\dots\text{④}$$

③, ④より,

$$\pi < \theta + \frac{\pi}{3} < 2\pi$$

したがって, 求める範囲は,

$$\underline{\underline{\frac{2}{3}\pi}} < \theta < \underline{\underline{\frac{5}{3}\pi}}$$



……オ, カ, キ, ク

(2) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より, $\sin\theta \geq 0, \cos\theta \geq 0$

これらが, 2次方程式

$$25x^2 - 35x + k = 0 \quad \dots\dots\textcircled{5}$$

の2解なので, 解と係数の関係から,

$$\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{35}{25} \\ \sin\theta \cos\theta = \frac{k}{25} \end{cases} \quad \text{つまり,} \quad \begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5} \quad \dots\dots\textcircled{6} \\ \sin\theta \cos\theta = \frac{k}{25} \quad \dots\dots\textcircled{7} \end{cases}$$

ここで, ⑥より,

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{49}{25} \quad \text{つまり,} \quad \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{49}{25}$$

これと, ⑦ および $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より,

$$1 + 2 \cdot \frac{k}{25} = \frac{49}{25}$$

よって,

$$k = \underline{\underline{12}} \quad \dots\dots\text{ケコ}$$

これより, ⑤は

$$25x^2 - 35x + 12 = 0$$

となるから,

$$(5x - 3)(5x - 4) = 0$$

よって,

$$x = \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

これらが $\sin\theta, \cos\theta$ のいずれかであり, $\sin\theta \geq \cos\theta$ を満たすとすると,

$$\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5} \quad \dots\dots\text{サ, シ, ス, セ}$$

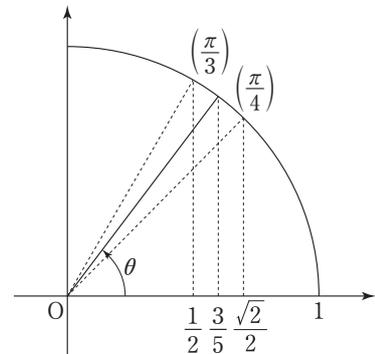
このとき,

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} < \cos\theta = \frac{3}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$$

であるから, θ は,

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3} \quad (\dots\dots\textcircled{3}) \quad \dots\dots\text{ソ}$$

を満たす。



[2]

$$(1) \quad t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3 \quad \dots\dots (*)$$

(*) について,

$$(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})^2 = 9 \quad \text{より}, \quad t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} - 2 = 9$$

これより,

$$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \underline{\underline{11}} \quad \dots\dots (**)$$

……タチ

ここで, $t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}}$ について,

$$(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 = t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} + 2$$

(**) より,

$$(t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}})^2 = 13$$

$t > 0$ より, $t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} > 0$ なので,

$$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\underline{\underline{13}}}$$

……ツテ

(*), (**) より,

$$(t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}})(t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}}) = -33$$

展開して,

$$t - t^{-1} - (t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}}) = -33$$

(*) より,

$$t - t^{-1} = \underline{\underline{-36}}$$

……トナニ

(2) $x > 0, y > 0$ のとき,

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leq 5 & \dots\dots ② \\ \log_{81} \frac{y}{x^3} \leq 1 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

において,

$$X = \log_3 x, \quad Y = \log_3 y$$

とおくと, ②の左辺は,

$$\begin{aligned} \log_3(x\sqrt{y}) &= \log_3 x + \log_3 \sqrt{y} \\ &= \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 y \\ &= X + \frac{1}{2} Y \end{aligned}$$

よって, ②は,

$$X + \frac{1}{2} Y \leq 5 \quad \text{つまり}, \quad \underline{\underline{2X + Y \leq 10}} \quad \dots\dots ④$$

……又, ネノ

また、③の左辺は、底の変換公式より、

$$\begin{aligned} \log_{81} \frac{y}{x^3} &= \frac{\log_3 \frac{y}{x^3}}{\log_3 81} \\ &= \frac{\log_3 y - \log_3 x^3}{\log_3 3^4} \\ &= \frac{\log_3 y - 3 \log_3 x}{4} \\ &= \frac{Y - 3X}{4} \end{aligned}$$

よって、③は、

$$\frac{Y - 3X}{4} \leq 1 \quad \text{つまり、} \underline{3X - Y \geq -4} \quad \dots\dots⑤$$

……ハ、ヒフ

④より、 $Y \leq -2X + 10$ ……④'

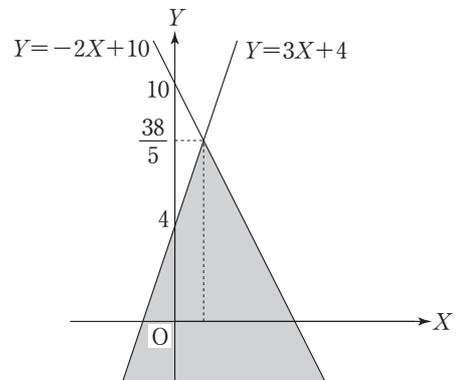
⑤より、 $Y \leq 3X + 4$ ……⑤'

Y のとり得る値の範囲は、右図より、

$$Y \leq \frac{38}{5}$$

よって、 Y のとり得る最大の整数の値は 7

……ヘ



このとき、④、⑤から、

$$\begin{cases} 2X + 7 \leq 10 \\ 3X - 7 \geq -4 \end{cases} \quad \text{つまり、} \begin{cases} X \leq \frac{3}{2} \\ X \geq 1 \end{cases}$$

より、

$$1 \leq X \leq \frac{3}{2}$$

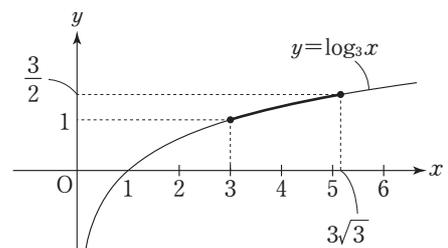
つまり、

$$1 \leq \log_3 x \leq \frac{3}{2} \quad \text{より、} \quad 3 \leq x \leq 3\sqrt{3}$$

ここで、 $5 = \sqrt{25} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3} < \sqrt{36} = 6$

よって、 x のとり得る最大の整数の値は 5

……ホ



第2問

(1) l と $C: y=x^2+2x+1$ は点 (t, t^2+2t+1) で接し、

$y'=2x+2$ より、 l の傾きは $2t+2$ となる。

よって、 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (2t+2)(x-t) + t^2 + 2t + 1 \\ &= \underline{(2t+2)x} - \underline{t^2+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

……ア, イ, ウ

また、 l と $D: y=f(x)=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$ は点 $(s, f(s))$ でも接し、

$f'(x)=2x-4a+2$ より、 l の傾きは $2s-4a+2$ となる。

よって、 l の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (2s-4a+2)(x-s) + s^2 - (4a-2)s + 4a^2 + 1 \\ &= \underline{(2s-4a+2)x} - \underline{s^2+4a^2+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

……エ, オ, カ, キ, ク

ここで、①と②は同じ直線を表しているので、係数を比較して、

$$\begin{cases} 2t+2=2s-4a+2 \\ -t^2+1=-s^2+4a^2+1 \end{cases} \quad \text{つまり、} \begin{cases} s-t=2a & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ s^2-t^2=4a^2 & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つ。

③, ④より、

$$2a(s+t)=4a^2$$

よって、 $a>0$ より、

$$s+t=2a \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

③, ⑤から、

$$t=0, s=2a$$

……ケ, コ

が成り立つ。

したがって、①より、 l の方程式は、

$$y=\underline{2x+1}$$

……サ, シ

(2) 2つの放物線 C, D の交点の x 座標は、

$$x^2+2x+1=x^2-(4a-2)x+4a^2+1$$

より、 $4ax=4a^2$ であり、 $a>0$ より、

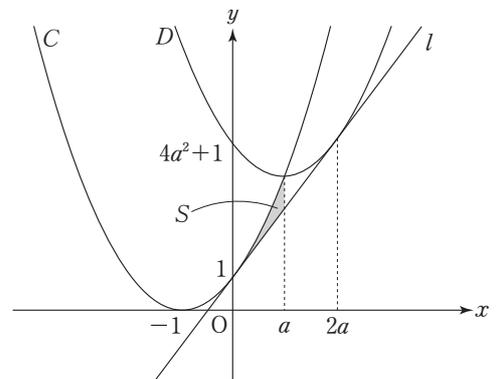
$$x=\underline{a}$$

……ス

である。

C と直線 l 、および直線 $x=a$ で囲まれた図形は右図

の網目部分で、その面積 S は、



$$S = \int_0^a \{x^2 + 2x + 1 - (2x + 1)\} dx$$

$$= \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{1}{3} a^3$$

よって、

$$S = \underline{\underline{\frac{a^3}{3}}}$$

……セ, ソ

(3) $a \geq \frac{1}{2}$ のとき, $2a \geq 1$ である。

ここで, $a > \underline{\underline{1}}$ のとき,

……タ

求める面積 T は,

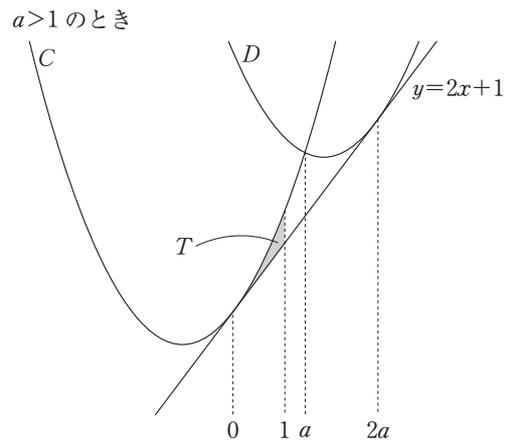
$$T = \int_0^1 \{x^2 + 2x + 1 - (2x + 1)\} dx$$

$$= \frac{1}{3}$$

よって, a の値によらず,

$$T = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

……チ, ツ



また, $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき, $a \leq 1 \leq 2a$ であることから,

$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき

$$T = S + \int_a^1 \{f(x) - (2x + 1)\} dx \quad \text{……⑥}$$

である。

ここで,

$$\int_a^1 \{f(x) - (2x + 1)\} dx$$

$$= \int_a^1 \{x^2 - (4a - 2)x + 4a^2 + 1 - (2x + 1)\} dx$$

$$= \int_a^1 (x^2 - 4ax + 4a^2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 - 2ax^2 + 4a^2 x \right]_a^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 2a + 4a^2 \right) - \left(\frac{1}{3} a^3 - 2a^3 + 4a^3 \right)$$

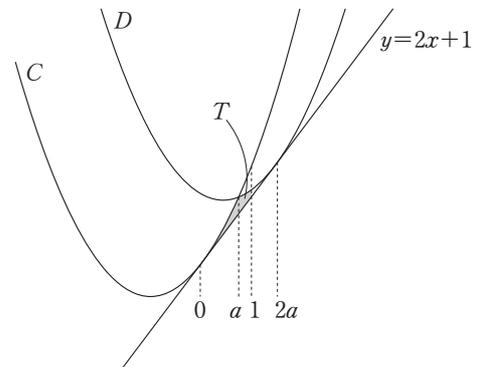
$$= -\frac{7}{3} a^3 + 4a^2 - 2a + \frac{1}{3}$$

であるから, ⑥に用いて,

$$T = \frac{a^3}{3} + \left(-\frac{7}{3} a^3 + 4a^2 - 2a + \frac{1}{3} \right)$$

$$= -\underline{\underline{2a^3}} + \underline{\underline{4a^2}} - \underline{\underline{2a}} + \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

……テ, ト, ナ, ニ, ヌ



(4) $U=2T-3S$ とおくと, $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき,

$$U = 2\left(-2a^3 + 4a^2 - 2a + \frac{1}{3}\right) - 3 \cdot \frac{a^3}{3}$$

$$= -5a^3 + 8a^2 - 4a + \frac{2}{3}$$

であるから, これを a の関数として,

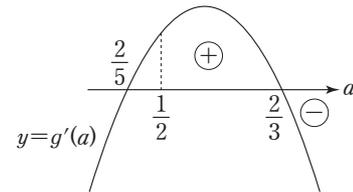
$$g(a) = -5a^3 + 8a^2 - 4a + \frac{2}{3} \quad \left(\frac{1}{2} \leq a \leq 1\right)$$

とおくと,

$$g'(a) = -15a^2 + 16a - 4$$

$$= -(5a-2)(3a-2)$$

である。したがって, $g(a)$ ($\frac{1}{2} \leq a \leq 1$) の増減は右のようになり,



$a = \frac{2}{3}$ で, 極大 かつ 最大となる。……ネ, ノ

よって, 最大値は,

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = -5\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 8\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{40}{27} + \frac{32}{9} - 2$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{27}}}$$

a	$\frac{1}{2}$...	$\frac{2}{3}$...	1
$g'(a)$		+	0	-	
$g(a)$		↗		↘	

……ハ, ヒフ

となる。

第3問

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} \{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \quad \dots\dots ①$$

$n=1$ のとき, $a_1=0$ であるから,

$$a_2 = \frac{4}{2} (3a_1 + 3^2 - 2 \cdot 3) = \underline{6} \quad \dots\dots \text{ア}$$

$$(2) \quad b_n = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)} \text{ とおくと, } a_1=0 \text{ より,}$$

$$b_1 = \frac{a_1}{3 \cdot 2 \cdot 3} = \underline{0} \quad \dots\dots \text{イ}$$

であり, $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)}$ であるから, ①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると,

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} &= \frac{1}{3^{n+1}(n+2)(n+3)} \cdot \frac{n+3}{n+1} \{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \\ &= \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

よって, $\{b_n\}$ についての漸化式

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \quad \dots\dots \text{ウ, エ, オ, カ}$$

を得る。

したがって,

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

と合わせて,

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \quad \dots\dots \text{キ}$$

が成り立つ。

このことから, $n \geq 2$ で,

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \quad \dots\dots ②$$

が成り立つ。

ここで, $n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots\dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)}} \quad \dots\dots \text{ク, ケ, コ} \end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{6}}} - \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned} \quad \dots\dots \text{サ, シ, ス, セ}$$

が成り立つ。これと②、および $b_1=0$ より、 $n \geq 2$ のとき、

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n+1} \right) - \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

が成り立つが、これは $n=1$ のとき、右辺は 0 となるので、 $n=1$ のときも成立する。

したがって、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{3(n-1) - (n+1)}{6(n+1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \underline{\underline{\frac{n-2}{3(n+1)}}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \dots\dots \text{③} \end{aligned} \quad \dots\dots \text{ツ, タ, チ}$$

(3) (2)の③と、 $a_n = 3^n(n+1)(n+2)b_n$ から、 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= 3^n(n+1)(n+2) \left\{ \frac{n-2}{3(n+1)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ &= \underline{\underline{\underline{\underline{3^{n-1}(n^2-4)}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}}} \quad \dots\dots \text{④} \end{aligned} \quad \dots\dots \text{ツ, テ, ト, ナ, ニ, ヌ}$$

で与えられる。

ここで、すべての自然数 n において、

$3^{n-1}(n^2-4)$ は整数であり、また $(n+1)(n+2)$ は連続する 2 整数の積なので必ず偶数となり、

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ も整数である。

このことより、すべての自然数 n について、 a_n は整数となることがわかる。

(4) n が自然数のとき、 a_n を 3 で割ったときの余りは、 $3^{n-1}(n^2-4)$ が 3 の倍数であることから、

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ を 3 で割った余りである。

㉞ $n=3k$ のとき

$$\frac{(3k+1)(3k+2)}{2} = \frac{9k^2+9k+2}{2} = 9 \cdot \frac{k(k+1)}{2} + 1$$

東進ハイスクール 東進衛星予備校

ここで、 $k(k+1)$ は連続する 2 整数の積なので、必ず偶数となり、

$$9 \cdot \frac{k(k+1)}{2} \text{ は } 9 \text{ の倍数}$$

となる。

よって、 a_{3k} を 3 で割った余りは 1

……ネ

である。

① $n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{(3k+1+1)(3k+1+2)}{2} &= \frac{3(3k+2)(k+1)}{2} \\ &= \frac{3(k+1)\{k+2(k+1)\}}{2} = 3 \left\{ \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)^2 \right\} \end{aligned}$$

⑦と同様に $\frac{k(k+1)}{2}$ は整数であり、 $\{ \quad \}$ 内は整数であるから、これは 3 の倍数である。

よって、 a_{3k+1} を 3 で割った余りは 0

……ノ

である。

② $n=3k+2$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{(3k+2+1)(3k+2+2)}{2} &= \frac{3(k+1)(3k+4)}{2} \\ &= \frac{3(k+1)\{k+2(k+2)\}}{2} = 3 \left\{ \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)(k+2) \right\} \end{aligned}$$

①と同様にして、これは 3 の倍数となるから、 a_{3k+2} を 3 で割った余りは 0

……ハ

である。

ここで、①、②は $k=0$ のときも成り立つので、 a_n を 3 で割った余りの数列は、

$$0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots$$

となるので、9 項ずつで区切るとき、各和を 3 で割ったときの余りは 0 となる。

$$2020 = 9 \cdot 224 + 4$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^{2020} a_k \text{ を } 3 \text{ で割った余りは、} a_{2017} + a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} \text{ を } 3 \text{ で割った余り}$$

となり、求める余りは、

$$0 + 0 + 1 + 0 = \underline{1}$$

……ヒ

である。

第4問

(1) $A(3, 3, -6)$ より, $\overrightarrow{OA}=3(1, 1, -2)$ であるから,

$$|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}=\underline{\underline{3\sqrt{6}}} \quad \dots\dots\text{ア, イ}$$

である。

また, $B(2+2\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3}, -4)$ より, $\overrightarrow{OB}=2(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, -2)$ であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}| &= 2\sqrt{(1+\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2+(-2)^2} \\ &= \underline{\underline{4\sqrt{3}}} \quad \dots\dots\text{ウ, エ} \end{aligned}$$

である。さらに,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 3(1, 1, -2) \cdot 2(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}, -2) \\ &= 6\{(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})+4\} \\ &= \underline{\underline{36}} \quad \dots\dots\text{オカ} \end{aligned}$$

である。

(2) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 24 \quad \dots\dots\text{①}$

点 C が平面 α 上, つまり, 平面 OAB 上にあるので, 実数 s, t を用いて,

$$\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad \dots\dots\text{②}$$

と表すと, ①より, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ であることから,

$$\overrightarrow{OA} \cdot (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) = s|\overrightarrow{OA}|^2 + t\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

よって,

$$54s + 36t = 0 \quad \text{つまり, } 3s + 2t = 0 \quad \dots\dots\text{③}$$

また, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 24$ より,

$$\overrightarrow{OB} \cdot (s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}) = s\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + t|\overrightarrow{OB}|^2 = 24$$

よって,

$$36s + 48t = 24 \quad \text{つまり, } 3s + 4t = 2 \quad \dots\dots\text{④}$$

③かつ④を解いて,

$$s = \underline{\underline{\frac{-2}{3}}}, \quad t = \underline{\underline{1}} \quad \dots\dots\text{キク, ケ, コ}$$

を得る。

したがって,

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \dots\dots\text{⑤}$$

であり,

$$|\overrightarrow{OC}|^2 = \left| -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \right|^2$$

$$= \frac{4}{9} |\vec{OA}|^2 - \frac{4}{3} \vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2$$

$$= 24$$

これより,

$$|\vec{OC}| = \underline{\underline{2\sqrt{6}}}$$

……サ, シ

(3) (2)の⑤より,

$$\vec{CB} = \vec{OB} - \vec{OC} = \frac{2}{3} \vec{OA}$$

$$= \frac{2}{3} (3, 3, -6) = (\underline{\underline{2}}, \underline{\underline{2}}, \underline{\underline{-4}})$$

……ス, セ, ソタ

である。

よって, このことから, $\vec{OA} \parallel \vec{CB}$ であるから, 平面 α 上の四角形 OABC は, 台形であることがわかる。

また, $|\vec{CB}| = \frac{2}{3} |\vec{OA}|$ なので, $|\vec{OA}| \neq |\vec{CB}|$ となり, これは正方形にも長方形にも, さらには平行四辺形にもなることはない。

以上より, 四角形 OABC は 平行四辺形ではないが, 台形である。 (……③)

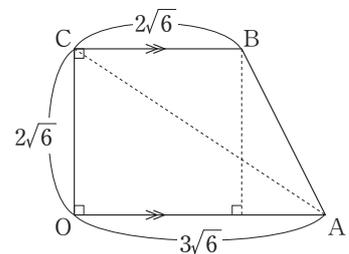
……チ

また, $\vec{OA} \perp \vec{OC}$ と右図より, 四角形 OABC の面積は,

$$\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{6}}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \underline{\underline{30}}$$

……ツテ

である。



(4) 点 D の z 座標が 1 であることより,

$$\vec{OD} = (x, y, 1)$$

とおくと, $\vec{OA} \cdot \vec{OD} = 0$ より,

$$(3, 3, -6) \cdot (x, y, 1) = 0 \quad \text{つまり, } 3x + 3y - 6 = 0$$

これより, x, y は,

$$x + y = 2 \quad \text{……⑥}$$

を満たす。また,

$$\vec{OC} = -\frac{2}{3} \times 3(1, 1, -2) + 2(1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}, -2)$$

$$= 2\sqrt{3}(1, -1, 0)$$

であるから, $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = 2\sqrt{6}$ より,

$$2\sqrt{3}(1, -1, 0) \cdot (x, y, 1) = 2\sqrt{6} \quad \text{つまり, } (1, -1, 0) \cdot (x, y, 1) = \sqrt{2}$$

これより, x, y は,

$$x - y = \sqrt{2} \quad \dots\dots ⑦$$

を満たす。

⑥, ⑦を解いて, $x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから, 点 D の座標は,

$$\left(\underline{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}, \underline{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}, 1 \right)$$

……ト, ナ, ニ, ヌ, ネ, ノ

である。このとき,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OD}|^2 &= \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

より, $|\overrightarrow{OD}| = 2$ である。これと, $|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{6}$, $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 2\sqrt{6}$ から, $\angle COD = \theta$ とおくと,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OD}|} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{6} \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

となり, $\theta = \angle COD = \underline{60^\circ}$

……ハヒ

である。

いま, 四面体 DABC について, 三角形 ABC を底面としたときの, この四面体の高さ h は, 平面 α と平面 β が垂直であるから, 点 D から直線 OC に下ろした垂線の長さに等しい。

よって,

$$\begin{aligned} h &= 2 \sin 60^\circ \\ &= \underline{\underline{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

……フ

したがって, 三角形 ABC の面積 S が,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = 12$$

であることから, 四面体 DABC の体積は,

$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \sqrt{3} = \underline{\underline{4\sqrt{3}}}$$

……ヘ, ホ

である。

