数学

1　数学Ⅰ・A総合

問題

▶ **配点　40 点**

(1)　8 点
(2)　8 点
(3)　8 点
(4)　(a)　4 点　　(b)　4 点
(5)　(a)　4 点　　(b)　4 点

（完答）

▶ **解答**

(1)　$x=\frac{7}{4}$

(2)　$x=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{45}{2}$，$x=\frac{3}{10}$ で最小値 $\frac{81}{10}$

(3)　$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(4)　(a)　729 通り　　(b)　540 通り

(5)　$\boxed{ア}$　④　　$\boxed{イ}$　③

▶ **出題のねらい**

(1)　絶対値のついた方程式を解けるか。
(2)　２次関数の最大値・最小値を正しく求められるか。
(3)　三角比の相互関係を理解しているか。
(4)　基本的な場合の数の問題を処理できるか。
(5)　必要条件，十分条件について正しく理解できているか。

▶ **解説**

(1)

［1］　$x\geqq 4$ のとき

$6x-\frac{3}{2}=4(x-4)=4x-16$ の解は $x=-\frac{29}{4}$

だが，これは $x\geqq 4$ を満たさない。

［2］　$x<4$ のとき

$6x-\frac{3}{2}=-4(x-4)=-4x+16$ の解は $x=\frac{7}{4}$

であり，これは $x<4$ を満たす。

よって，求める解は，

$x=\frac{7}{4}$　……(答)

である。

(2)　$f(x)=10\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{81}{10}$ より，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq\frac{3}{2}$ において，

$x=\frac{3}{2}$ で最大値 $\frac{45}{2}$，$x=\frac{3}{10}$ で最小値 $\frac{81}{10}$　……(答)

をとる。

(3)　$1+\tan^2\theta=\frac{5}{4}=\frac{1}{\cos^2\theta}$，$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ より，$\cos\theta>0$ に注意して，

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$　……(答)

である。よって，$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ から，

$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$　……(答)

である。

(4)

(a)　1 人の生徒につき，部屋の選び方は 3 通り存在するので，求める場合の数は，

$3^6=729$（通り）　……(答)

である。

(b)　(a)で求めた場合の数から，ちょうど 1 つの部屋に 6 人全員が集まる場合と，ちょうど 2 つの部屋に 6 人が分かれる場合を除けばよい。ちょうど 1 つの部屋に 6 人全員が集まる場合の数は，どの部屋に集まるかで 3 通りである。ちょうど 2 つの部屋に 6 人が分かれる場合は，どの部屋に分かれるかで ${}_3C_2=3$（通り）あり，それぞれの部屋への分け方が $2^6-2=62$（通り）あるから，$3\times 62=186$（通り）である。以上より，求める場合の数は，

$729-3-186=540$（通り）　……(答)

である。

(5)

(a)　例えば，$(a,\ b)=(1,\ \sqrt{3})$ とすれば，$ab^2=3$ は有理数であるから，これは「a が有理数，b が無理数ならば ab^2 は無理数である」の反例となる。また，例えば $a=b=\sqrt{3}$ とすれば，$ab^2=3\sqrt{3}$ は無理数だが，a は無理数であるため，これは「ab^2

が無理数ならば a は有理数，b は無理数である」の反例になっている。以上より，$\boxed{ア}$ には，

④ 必要条件でも十分条件でもない ……(答)

があてはまる。

(b)

［1］ $x<1$ のとき
$|x-1|+|x-2|=-(x-1)-(x-2)$
$=-2x+3\leqq 1 \iff x\geqq 1$ となるが，これは $x<1$ に矛盾する。

［2］ $1\leqq x<2$ のとき
$|x-1|+|x-2|=(x-1)-(x-2)=1\leqq 1$
はこの区間内のすべての x に対して成立する。

［3］ $x\geqq 2$ のとき
$|x-1|+|x-2|=(x-1)+(x-2)$
$=2x-3\leqq 1 \iff x\leqq 2$ となり，$x=2$ のみが解となる。

以上より，$|x-1|+|x-2|\leqq 1 \iff 1\leqq x\leqq 2$
$\iff (x-1)(x-2)\leqq 0$ であるから，
$\boxed{イ}$ には，

③ 必要十分条件である ……(答)

があてはまる。

アドバイス

必要条件と十分条件

一般に，２つの条件 p，q についての命題「$p \Longrightarrow q$」が成り立つとき，

q は p であるための必要条件である

p は q であるための十分条件である

という。また，命題「$p \Longrightarrow q$」および「$q \Longrightarrow p$」のいずれもが成り立つとき，

q は p であるための必要十分条件である

（p は q であるための必要十分条件である）

という。言葉だけではニュアンスの違いを掴みにくいが，条件 p を満たすならば必ず条件 q も満たされることから，条件 q は条件 p が成立するために「必要」な条件と考えるとよい。また，条件 p が満たされているならば条件 q も満たされるため，条件 p は条件 q が成立することを確認する上で「十分」な情報を持った条件と考えることができる。

2　三角関数

問題

▶ 配点　40 点

(1)　8 点

(2)　(i)　8 点　　(ii)　6 点

(3)　8 点

(4)　10点

▶ 出題のねらい

1．与えられた定義域における三角関数の取り得る値の範囲を求めることができるか。

2．三角関数の変換を行い，正しく方程式を解くことができるか。

3．絶対値を含む方程式を場合分けによって処理できるか。

▶ 解答

8

(1)　$f(x)=8\cos^3 x+4\sin^2 x-6\cos x-1$ に $x=\dfrac{\pi}{3}$ を代入して，

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=8\cos^3\frac{\pi}{3}+4\sin^2\frac{\pi}{3}-6\cos\frac{\pi}{3}-1$$
$$=8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-6\cdot\frac{1}{2}-1$$
$$=1+3-3-1=0$$
+4 ……(答)

となる。また，$f(x)=8\cos^3 x+4\sin^2 x-6\cos x-1$ に $x=\dfrac{\pi}{2}$ を代入して，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=8\cos^3\frac{\pi}{2}+4\sin^2\frac{\pi}{2}-6\cos\frac{\pi}{2}-1$$
$$=8\cdot 0+4\cdot 1^2-6\cdot 0-1$$
$$=4-1=3$$
+4 ……(答)

となる。

(2)

8

(i)　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ において，$\cos x$ の取り得る値の範囲は $-1\leqq\cos x\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。したがって，

$$-1\leqq t\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}$$
+4 ……(答)

である。また，$\sin^2 x=1-\cos^2 x$ より，

$$\begin{aligned} f(x)&=8\cos^3 x+4\sin^2 x-6\cos x-1\\ &=8\cos^3 x+4(1-\cos^2 x)-6\cos x-1\\ &=8\cos^3 x-4\cos^2 x-6\cos x+3\\ &=\underline{\underline{8t^3-4t^2-6t+3}} \end{aligned}$$

……(答)

と表せる。

+4

6　(ii)　(1)より $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ であるから，$x=\dfrac{\pi}{3}$，すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ は $8t^3-4t^2-6t+3=0$ の解である。したがって，因数定理により $8t^3-4t^2-6t+3$ は $2t-1$ で割り切れる。よって，

$$\begin{aligned} &8t^3-4t^2-6t+3\\ &=(2t-1)(4t^2-3)\\ &=\underline{\underline{(2t-1)(2t-\sqrt{3})(2t+\sqrt{3})}} \end{aligned}$$

……(答)

と因数分解できる。

+6

8　(3)　$f(x)=0$ となるような t の値は，

$$(2t-1)(2t-\sqrt{3})(2t+\sqrt{3})=0$$

より，$t=\dfrac{1}{2}$，$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。このうち $-1\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を満たすものは $t=\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の2つである。

$t=\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ が解になること　+2

［1］　$t=\dfrac{1}{2}$ のとき

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ の範囲で $t=\dfrac{1}{2}$ となる x の値は，

$$x=\frac{\pi}{3}$$

である。

［2］　$t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ の範囲で $t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる x の値は，

$$x=\frac{5}{6}\pi,\quad \frac{7}{6}\pi$$

である。

［1］，［2］より，$f(x)=0$ の解は，

$$\underline{\underline{x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi}}$$

……(答)

である。

+2 ×3

10　(4)　絶対値を場合分けすることにより外すと，

$$|\cos^3 x|=\begin{cases}\cos^3 x & \left(\dfrac{\pi}{4}\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\cos^3 x & \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi\right)\end{cases}$$

および，

$$\begin{aligned} &|4\sin^2 x-6\cos x|\\ &=|-4\cos^2 x-6\cos x+4|\\ &=|-2(2\cos x-1)(\cos x+2)|\\ &=\begin{cases}-4\sin^2 x+6\cos x & \left(\dfrac{\pi}{4}\leqq x<\dfrac{\pi}{3}\right)\\ 4\sin^2 x-6\cos x & \left(\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi\right)\end{cases} \end{aligned}$$

となる。したがって，

$$g(x)=\begin{cases}8\cos^3 x-4\sin^2 x+6\cos x-1 & \left(\dfrac{\pi}{4}\leqq x<\dfrac{\pi}{3}\right)\\ f(x) & \left(\dfrac{\pi}{3}\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -8\cos^3 x+4\sin^2 x-6\cos x-1 & \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi\right)\end{cases}$$

である。

絶対値を正しく外せていて　+2

［1］　$\dfrac{\pi}{4}\leqq x<\dfrac{\pi}{3}$ のとき

$$\begin{aligned} g(x)&=8\cos^3 x-4\sin^2 x+6\cos x-1\\ &=8\cos^3 x-4(1-\cos^2 x)+6\cos x-1\\ &=8\cos^3 x+4\cos^2 x+6\cos x-5\\ &=(2\cos x-1)(4\cos^2 x+4\cos x+5) \end{aligned}$$

と変形でき，$\dfrac{\pi}{4}\leqq x<\dfrac{\pi}{3}$ において

$$\begin{cases}2\cos x-1>0\\ 4\cos^2 x+4\cos x+5=(2\cos x+1)^2+4>0\end{cases}$$

であるから，$g(x)>0$ が常に成り立つ。よって，このとき解は存在しない。

$\frac{\pi}{4}\leqq x<\frac{\pi}{3}$ で解が存在しないこと　+2

［2］　$\dfrac{\pi}{3}\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$g(x)=f(x)$ より，$g(x)=0$ の解は $f(x)=0$ の解と一致する。よって，

$$x=\frac{\pi}{3},\quad \frac{5}{6}\pi,\quad \frac{7}{6}\pi$$

が解の候補であり，このうち $\dfrac{\pi}{3}\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすものは $x=\dfrac{\pi}{3}$ のみである。

$\frac{\pi}{3}\leqq x<\frac{\pi}{2}$ で $x=\frac{\pi}{3}$ が解に　+2

［3］　$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{5}{4}\pi$ のとき

$$\begin{aligned} g(x)&=-8\cos^3 x+4\sin^2 x-6\cos x-1\\ &=-8\cos^3 x+4(1-\cos^2 x)-6\cos x-1\\ &=-8\cos^3 x-4\cos^2 x-6\cos x+3 \end{aligned}$$

と変形できる。$t=\cos x$ と置くことで，

$-1\leqq t\leqq 0$ の範囲で，

$$-8t^3-4t^2-6t+3=0$$

の解を求めればよい。ここで，

$h(t)=-8t^3-4t^2-6t+3$ を t について微分する

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ で
解が存在しないことに

と，

$$h'(t)=-24t^2-8t-6$$
$$=-24\left(t+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{16}{3}<0$$

+2

であるから，$h(t)$ は t についての単調減少関数である。また，$h(0)=3$ より $-1\leq t\leq 0$ の範囲で，

$$h(t)\geq h(0)=3$$

となるから，$-1\leq t\leq 0$ の範囲に解は存在しない。

以上［1］，［2］，［3］より，求める解は，

$$x=\frac{\pi}{3} \quad \cdots\cdots(答)$$

である。

正しく答を
求められていて　+2

アドバイス

三角関数の高次方程式への応用

(2)(i)では与えられた定義域での $\cos x$ の取りうる値の範囲を求め，更に $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ を用いて $f(x)$ を $\cos x$ のみで表せばよい。(ii)では(1)で求めた値から因数分解の形を予想することができる。

(4)では絶対値を場合分けすることにより外し，$\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{5}{4}\pi$ の場合には解を持たず，$\frac{\pi}{3}\leq x<\frac{\pi}{2}$ の場合には $g(x)=f(x)$ より $f(x)=0$ の解と同じものを解に持つことがわかる。このとき，場合分けをした条件に合致しているかを確認することを忘れないようにしよう。三角関数の高次の方程式では，因数分解ができるかどうか，$\cos x$ や $\sin x$ のみの式で表すことができないかなどを考えていくことが重要である。

3　確率

問題

▶ **配点　40 点**

(1)　6 点
(2)　6 点
(3)　8 点
(4)　8 点
(5)　12点

▶ **出題のねらい**

1．反復試行の確率を正しく求められるか。
2．場合分けによって正しく確率を求めることができているか。
3．条件付き確率について正しく理解できているか。

▶ **解答**

(1)　$x(1)=0,\ 1,\ 2$ となる確率をそれぞれ $A,\ B,\ C$ とすると，

6

$$A=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$$

+2

$$B=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times 2=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots(答)$$

+2

$$C=\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$$

+2

である。

(2)　1 回目から 4 回目の試行のうち，1 回で赤玉が 1 つだけ取り出され，残りの試行では全て白玉を取り出せばよいから，求める確率は，

6

$${}_4C_1\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{32} \quad \cdots\cdots(答)$$

+6

である。

【(2)の別解】

4 回目の試行までに取り出した 8 つの玉のうち，1 つだけが赤玉であればよいから，求める確率は，

$${}_8C_1\times\left(\frac{2}{4}\right)^7\times\frac{2}{4}=\frac{1}{32} \quad \cdots\cdots(答)$$

+6

である。

8

(3)　$x(5)$ の値で場合分けをして考える。

［1］　$x(5)=1$ のとき

5回目の試行までに赤玉が1つだけ取り出されて，6回目の試行で赤玉が2つ取り出されればよいから，求める確率は，

$${}_5C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\frac{1}{4}=\frac{10}{4^6}$$

+2

である。

［2］　$x(5)=2$ のとき

5回目の試行までに赤玉が2つだけ取り出され，6回目の試行で赤玉が1つ取り出されればよい。5回目の試行までのうち，1回の試行で赤玉が2つ取り出され，残りの試行は全て白玉である確率は，

$${}_5C_1\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\frac{2}{4}=\frac{10}{4^6}$$

+2

であり，2回の試行で赤玉が1つずつ取り出され，残りの試行は全て白玉である確率は，

$${}_5C_2\times\left(\frac{2}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{2}{4}=\frac{80}{4^6}$$

+2

である。

以上［1］，［2］より，求める確率は，

$$\frac{10}{4^6}+\frac{10}{4^6}+\frac{80}{4^6}=\underline{\underline{\frac{25}{1024}}}$$ ……(答)

+2

である。

8

(4)　1回目の試行で赤玉が取り出されるか否かに応じて場合分けをして考える。

［1］　1回目の試行で赤玉が取り出されるとき

2回目の試行で赤玉が取り出されてしまうと条件を満たさないため，2回目の試行では白玉を2つ取り出す。3回目，4回目の試行では2回連続で赤玉が取り出されなければ条件を満たすから，求める確率は，

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}=\frac{21}{256}$$

+2

である。

［2］　1回目の試行で赤玉が取り出されないとき

2回目の試行で赤玉が取り出されるとき，3回目の試行で赤玉が取り出されてしまうと条件を満たさないため，3回目では白玉を2つ取り出す。4回目ではいずれの場合でも条件を満たすから，求める確率は，

$$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times1=\frac{3}{64}$$

+2

である。また，2回目の試行で赤玉が取り出されないとき，3回目，4回目の試行では2回連続で赤玉が取り出されなければ条件を満たすから，求める確率は，

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}=\frac{7}{256}$$

+2

である。

以上［1］，［2］より求める確率は，

$$\frac{21}{256}+\frac{3}{64}+\frac{7}{256}=\underline{\underline{\frac{5}{32}}}$$ ……(答)

+2

である。

12

(5)　$y(8)=2$ であるとき，$y(6)=0$，$y(7)=1$，$y(8)=2$ が成り立つから，$\sum_{i=1}^{8}\{y(i)\}^2\leqq8$ は $\sum_{i=1}^{5}\{y(i)\}^2\leqq3$ と言い換えられる。このとき，5以下の i に対して $y(i)<2$ が必要である。また，5以下の i について4つ以上の i で $y(i)=1$ となることはないから，5回の試行を終えるまでに点Qが一度も2の位置に到達しない確率を求めればよい。(4)と同様に1回目に赤玉が取り出されるかどうかで場合分けをして考える。

条件の言い換え +2

［1］　1回目の試行で赤玉が取り出されるとき

2回目の試行で赤玉が取り出されてしまうと条件を満たさないため，2回目の試行では白玉を2つ取り出す。残りの3回の試行は，(4)［2］と同様に考えることで，求める確率は，

1回目に赤の場合

$$\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{16}+\frac{7}{64}\right)=\frac{57}{1024}$$

+2

である。

［2］　1回目の試行で赤玉が取り出されないとき

残りの4回の試行は，(4)と同様に考えることで，求める確率は，

1回目に白の場合

$$\frac{1}{4}\times\frac{5}{32}=\frac{5}{128}$$

+2

である。

以上［1］，［2］より，$\sum_{i=1}^{8}\{y(i)\}^2\leqq8$ かつ $y(8)=2$ となる確率は，

$$\left(\frac{57}{1024}+\frac{5}{128}\right)\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$$

である。ここで，$y(8)=2$ となるのは，6回目の試行で赤玉を取り出さず，7，8回目の試行の両方で赤玉を取り出す場合であるから，この確率は，

$$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$$

y(8)=2となる確率 +2

である。したがって，求める条件付き確率は，

$$\frac{\left(\frac{57}{1024}+\frac{5}{128}\right)\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}}=\underline{\underline{\frac{97}{1024}}}$$ ……(答)

答に +4

である。

アドバイス

動点の位置に関する確率

(1)は基本的な確率の計算問題であった。ここは是非とも正答して欲しい問題である。

(2)，(3)は反復試行の確率についての問題であった。(2)は4回の試行のいずれかで赤玉が1つだけ取り出されればよいことに気づければ，残りの3回は白玉2つが取り出されることがわかる。反復試行の確率における基本問題なので確実に身につけて欲しい。(3)は6回目の試行で取り出す赤玉の個数で場合分け出来るかがポイントであった。

(4)，(5)は設定が変わり，動かないという操作がなくなり，原点に戻るという操作が加わる。(4)について，1回目の取り出し方によって場合分けをするという考え方は非常に重要である。1回目に赤玉が取り出された場合，2回目の試行で赤玉を取り出すと条件を満たさないため，必ず原点に戻ることになる。その後の3，4回目の試行では，2回連続で赤玉が取り出されない限りは条件を満たすことがわかる。1回目に赤玉が取り出されなかった場合，3回の試行を終えるまでに一度も2の位置に到達しない確率を求めることと同様となる。この考え方は(5)に効いてくる。(5)について，$y(8)=2$ となる確率は，6回目に原点に戻り，7，8回目の試行で赤玉を取り出す確率を求めればよいため，5回目までの試行には依らないことがわかる。条件の $\sum_{i=1}^{8}\{y(i)\}^2$ を言い換えられるかがポイントになる。

4　微積分

問題

▶ 配点　40点

(1)　4点

(2)　5点

(3)　(i)　4点　　(ii)　5点

(4)　10点

(5)　12点

▶ 出題のねらい

1．微積分の基本の計算が正しくできるか。

2．定積分を利用して，曲線や直線で囲まれた図形の面積を求めることができるか。

3．等積条件を工夫し，応用的な面積の計算ができるか。

▶ 解答

(1)　$g(x)=G'(x)$ であるから，$G(x)$ を x で微分して，

4

$$\underline{g(x)=-x^2+4x-3}$$ ……(答)

である。

+4

(2)　x^n の不定積分の1つが $\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ であることから，

5

$$\underline{\underline{\int(3t^2-8t+3)dt=t^3-4t^2+3t+C}}$$

+5

$\underline{\underline{(C\text{ は積分定数})}}$ ……(答)

である。

積分定数抜けは −1

(3)

(i)　(2)の不定積分を用いると，

4

$$\int_1^x(3t^2-8t+3)dt=\left[t^3-4t^2+3t\right]_1^x$$
$$=(x^3-4x^2+3x)-(1-4+3)$$
$$=x^3-4x^2+3x$$

である。したがって，

$$\underline{f(x)=x^3-4x^2+3x}$$ ……(答)

+4

である。

5 (ii)　$f(x)$ を因数分解すると，

$$f(x)=x^3-4x^2+3x$$
$$=x(x^2-4x+3)$$
$$=x(x-1)(x-3)$$

である。したがって $f(x)=0$ を解くと，

$\underline{\underline{x=0,\ 1,\ 3}}$ ……(答)

である。　+5（完答）

(4)　$y=g(x)$ を平方完成すると，

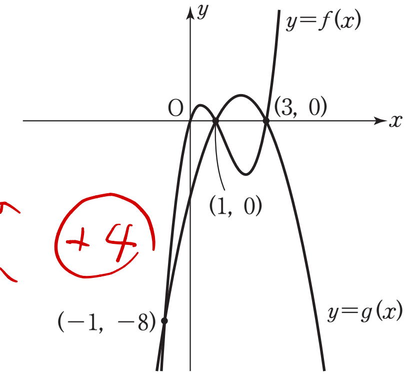
10

$$g(x)=-(x^2-4x)-3$$
$$=-(x-2)^2+1$$

である。また，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標は，

$$f(x)=g(x)$$
$$\iff x^3-4x^2+3x=-x^2+4x-3$$
$$\iff x^3-3x^2-x+3=0$$
$$\iff (x-3)(x^2-1)=0$$
$$\iff (x-3)(x-1)(x+1)=0$$

より，$x=-1,\ 1,\ 3$ である。よって，$y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフは以下のように描ける。



y=f(x)と
y=g(x)の
位置関係
交点、が
わかっていて
+4

よって，求める面積は，$-1\leqq x\leqq 1$ では $f(x)\geqq g(x)$，$1\leqq x\leqq 3$ では $f(x)\leqq g(x)$ であることに注意して，以下のように立式できる。

$$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{1}^{3}\{g(x)-f(x)\}dx$$

これを計算すると，　正しい立式に　+2

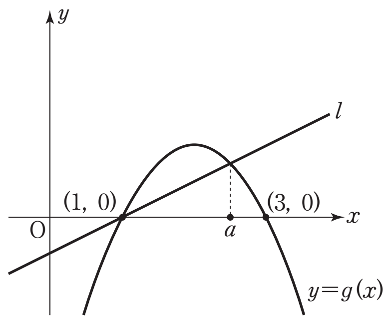
$$\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)dx$$
$$+\int_{1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{1}$$
$$+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{1}^{3}$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right)\right\}$$
$$+\left\{\left(-\frac{81}{4}+27+\frac{9}{2}-9\right)-\left(-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-3\right)\right\}$$
$$=4+4$$
$$=\underline{\underline{8}}$$

……(答)

である。　答に　+4

12

(5)　点 $(1,\ 0)$ を通り図形 A の内部を通過する傾き m の直線を l とし，l と $y=g(x)$ の共有点の x 座標を a とすると，以下のように描ける。



図形 A の面積を S とし，直線 l によって分けられる二つの図形のうち直線 l の上側の図形の面積を S_1，下側の図形の面積を S_2 とすると，$S_1=S_2$ であることより，

$$S=S_1+S_2=2S_1 \quad \cdots\cdots①$$　+2

である。よって，S，S_1 をそれぞれ計算して，

$$S=\int_{1}^{3}\{-(x-1)(x-3)\}dx$$
$$=-\left\{-\frac{1}{6}(3-1)^3\right\}=\frac{4}{3}$$　+2

$$S_1=\int_{1}^{a}\{-(x-1)(x-a)\}dx$$
$$=-\left\{-\frac{1}{6}(a-1)^3\right\}=\frac{(a-1)^3}{6}$$　+2

である。ここで，直線 l と，$y=g(x)$ を連立すると，

$$-x^2+4x-3=m(x-1)$$
$$\iff x^2+(m-4)x-m+3=0$$

である。また，解と係数の関係より $a+1=-m+4$，すなわち $a=-m+3$ であるから，①を整理すると，　+2

$$2\times\frac{(a-1)^3}{6}=\frac{4}{3}$$
$$\iff (a-1)^3=4$$
$$\iff (-m+2)^3=4 \quad (\because\ a=-m+3)$$
$$\iff -m+2=\sqrt[3]{4}$$

であり，

$\underline{\underline{m=2-\sqrt[3]{4}}}$ ……(答)

である。　+4

アドバイス

微積分の基本的な計算および面積計算

(1)(2)は，微積分の基本的な計算問題である。微積分では，如何に基本的な計算が正しくできるかということが大事になってくるため，今回のような計算はミスなく得点したい。

(3)(i)は定積分と関数が組み合わさった問題である。定積分の計算が正しくできれば正答できるが，関数が定積分で定義されたものに馴染みがないと初めは迷うかもしれない。見た目に馴染みがなくとも，やることは定積分の計算であるので，基本に忠実に得点したい。

(3)(ii)は，グラフの概形を想像するために，増減表ではなく，方程式の解を求めることでどのようなグラフが描けるかを考えるとよい。因数分解できるような場合は今回のように解を求めることでグラフを描くことができる。

(4)では，(3)(ii)の結果から描いたグラフを用いて二つの曲線の上下関係を明らかにし，定積分を求積に応用する問題である。求積の問題では，基本的にはグラフを描き上下関係を明らかにし，それをもとに立式，正しく計算することができれば得点できる。

(5)では，まず等積条件を $S=2S_1$ に変換できるかがカギである。これができればあとは放物線と直線で囲まれる図形の面積を求めればよいので，$\frac{1}{6}$ 公式を利用することができる。一見難しい条件について，簡単で使いやすい条件に変換する訓練をし，また計算の手間を省ける公式や工夫の仕方を自分のものとすることができれば，完答も容易であろう。

5 数列

問題

▶ 配点　40 点

(1)　6 点
(2)　8 点
(3)　8 点
(4)　9 点
(5)　9 点

▶ 出題のねらい

1．等比数列・Σ の計算を正しく理解できているか。
2．常用対数の扱いを正しく理解できているか。

▶ 解答

(1)　与えられた関係式より，

6　$a_2=3a_1{}^2=3,\ a_3=3^2a_2{}^2=9\times9=81$　……(答)

となる。 a_2, a_3 それぞれに +3 ×2

(2)　$\{a_n\}$ は自然数からなる数列であるから，漸化式

8　の両辺について底を 3 とする対数をとると，

$$\log_3 a_{n+1}=\log_3 3^n a_n{}^2=n+2\log_3 a_n$$

となる。したがって，$b_n=\log_3 a_n$ より，

$b_{n+1}=2b_n+n$　……(答)

である。 +8

(3)　$c_n=b_n+n+1$ より，$b_n=c_n-n-1$ と変形できる。

8　これを(2)に代入することで，

$$c_{n+1}-(n+1)-1=2(c_n-n-1)+n$$

が得られる。したがって，

$c_{n+1}=2c_n$　……(答)

である。 +8

(4)　$b_1=\log_3 a_1=0,\ c_1=b_1+2=2$ より，$\{c_n\}$ は初項 2，

9　公比 2 の等比数列であるから，

$$c_n=2\cdot2^{n-1}=2^n$$

$c_n=2^n$ に +3

が成り立つ。これより，$b_n=2^n-n-1$ であるから，

$a_n=3^{2^n-n-1}$ である。よって，

$a_n=3^{2^n-n-1}$ に +3

$S_n=3^{\sum_{k=1}^{n}(2^k-k-1)}=3^{2^{n+1}-\frac{1}{2}n(n+1)-n-2}$　……(答)

答に +3

英語 数学 物理 化学 生物 世界史 日本史 地理 国語

である。

$S_6=3^{99}$ に　+3

9 (5)　$S_6=3^{27-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7-8}=3^{99}$ である。よって，

$$\log_{10}S_6=99\cdot\log_{10}3=99\cdot 0.4771=47.2329$$

であるから，

$$47<\log_{10}S_6<47+\log_{10}2$$

$$\iff\quad 10^{47}<S_6<2\cdot 10^{47}$$

が成り立つ。したがって，S_6 の最高位の数字は，

$\underline{\underline{1}}$　……(答)

である。

答に　+3

$\log_{10}S^6=47.2329$ に　+3

アドバイス

対数漸化式

対数漸化式は，頻出分野ではないため戸惑ったかもしれない。だが，誘導に乗っていけば手がつけられないということはない。もし誘導がなかったとしても，とりあえず累乗の形を解消するために対数をとろうと考えられるようになるとよい。(2)までは対数の基本的な扱いである。誘導がなくてもこの変形ができるようにしたい。(4)は等比数列や $\sum$ の計算の扱いについて出題した。$a^x\cdot a^y$ について，a^{x+y} ではなく，a^{xy} とするミスがよく見受けられるため気を付けよう。数列の一般項についての問題では，$n=1,\ 2$ などを代入することで計算が間違っているかどうかを確認することができるため，一般項を求めたときは必ず見直しをするようにしよう。