数学

1　数と式

問題

▶ **配点　40 点**

(1)　(a)　4 点　　(b)　4 点
(2)　8 点
(3)　8 点
(4)　8 点
(5)　(a)　4 点　　(b)　4 点

▶ **解答**

(1)　(a)　$(2x+5)(3x+2)$
　　(b)　$4x^2+4y^2+9z^2+8xy+12yz+12zx$
(2)　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
(3)　$5x-1$
(4)　$-3<x\leqq-\dfrac{4}{3}$
(5)　$\boxed{ア}$　④　　$\boxed{イ}$　③

(完答)

▶ **出題のねらい**

(1)　基本的な展開や因数分解を正しく行えるか。
(2)　有理化を利用して計算することが出来るか。
(3)　絶対値の意味を理解しているか。
(4)　基本的な連立 1 次不等式を解けるか。
(5)　必要条件，十分条件について正しく理解できているか。

▶ **解説**

(1)

(a)　$6x^2+19x+10=\underline{\underline{(2x+5)(3x+2)}}$　……(答)

(b)　$(2x+2y+3z)^2$
$=\underline{\underline{4x^2+4y^2+9z^2+8xy+12yz+12zx}}$
……(答)

(2)　すべての項について分母を有理化すると，

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$$
$$=\underline{\underline{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$$　……(答)

となる。

(3)　$-\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{3}{2}$ のとき，$3x+2>0$ かつ $2x-3<0$ であるから，

$$|3x+2|-|2x-3|=(3x+2)-(-2x+3)$$
$$=\underline{\underline{5x-1}}$$　……(答)

と変形できる。

(4)
$$\begin{cases}5x+3\leqq 2x-1 \iff x\leqq-\dfrac{4}{3}\\ 2x+3>x \iff x>-3\end{cases}$$
より，求める解は，
$$\underline{\underline{-3<x\leqq-\frac{4}{3}}}$$　……(答)

である。

(5)

(a)　例えば，$(a,\ b)=(1,\ -2)$ とすると，$a^2=1<4=b^2$ であるが，このとき $a>b$ であるから，これは「$a^2<b^2 \Longrightarrow a<b$」の反例になっている。また，例えば $(a,\ b)=(-2,\ 1)$ とすると，$a<b$ であるが，$a^2=4>1=b^2$ であるから，これは「$a<b \Longrightarrow a^2<b^2$」の反例になっている。よって，$\boxed{ア}$ には，

<u>④　必要条件でも十分条件でもない</u>
……(答)

があてはまる。

(b)　a，b は自然数であるから，両方正の数である。よって，$a^2<b^2 \iff a<b$ が成り立つから，
$\boxed{イ}$ には，

<u>③　必要十分条件である</u>　……(答)

があてはまる。

アドバイス

必要条件と十分条件

一般に，2 つの条件 p，q についての命題「$p \Longrightarrow q$」が成り立つとき，

q は p であるための必要条件である
（p は q であるための十分条件である）

という。また，命題「$p \Longrightarrow q$」および「$q \Longrightarrow p$」のいずれもが成り立つとき，

q は p であるための必要十分条件である

（p は q であるための必要十分条件である）という。言葉だけではニュアンスの違いを掴みにくいが，条件 p を満たすならば必ず条件 q も満たされることから，条件 q は条件 p が成立するために「必要」な条件と考えるとよい。また，条件 p が満たされているならば条件 q も満たされるため，条件 p は条件 q が成立することを確認する上で「十分」な情報を持った条件と考えることができる。

2　2次関数

問題

▶ 配点　40点

(1)　6点
(2)　6点
(3)　8点
(4)　8点
(5)　12点

▶ 出題のねらい

1．2次不等式を解くことができるか。
2．判別式と解の個数の関係を理解できているか。
3．やや複雑な解の配置を問う問題に対して条件を過不足なく列挙して処理できるか。

▶ 解答

6 (1)　$x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ より，

$(x+2)(x-3)<0$

$\therefore\ \underline{\underline{-2<x<3}}$ ……(答)　答に +6

である。

6 (2)　$x^2-ax+3=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+3$　平方完成までは +3

より，$y=x^2-ax+3$ のグラフの頂点の座標は，

$\underline{\underline{\left(\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}+3\right)}}$ ……(答)　答に +6

と表せる。

8 (3)　$x^2-ax+3=0$ の判別式を D とするとき，求める条件は $D>0$ である。したがって，　D>0 に +4

$D=a^2-12>0$

$a^2>12$

$\underline{\underline{a<-2\sqrt{3},\ a>2\sqrt{3}}}$ ……(答)　答に +4

が求める a の値の範囲である。

【(3)の別解】

$y=x^2-ax+3$ は，下に凸の放物線であるから，

英語 数学 国語

頂点の y 座標が負となるような条件を求めればよい。したがって，(2)より，

$$-\frac{a^2}{4}+3<0$$

$$a^2-12>0$$

$$\underline{\underline{a<-2\sqrt{3},\ a>2\sqrt{3}}}$$ ……(答)

である。

答に +4

8 (4)　$f(x)=x^2-ax+3$ とするとき，(2)より，$y=f(x)$ の軸は $x=\frac{a}{2}$ である。したがって，$f(x)=0$ が相異なる 2 つの実数解をもち，その実数解がともに 1 より大きくなるような条件は，

$$\begin{cases} f(1)>0 \\ \dfrac{a}{2}>1 \\ D>0 \end{cases}$$

それぞれの条件に +2 × 3

である。$f(1)=4-a>0$ を解くと，$a<4$ である。また，$\frac{a}{2}>1$ を変形すると，$a>2$ となる。そして，(3)より $D>0$ となるための条件は $a<-2\sqrt{3}$，$a>2\sqrt{3}$ である。以上より，求める a の値の範囲は，

$$\underline{\underline{2\sqrt{3}<a<4}}$$ ……(答)

である。

答に +2

12 (5)　$f(x)=0$ が $x=1,\ 2$ を解にもつかどうかで場合分けする。

［1］　$x=1$ を解にもつとき

このとき，$f(1)=0$ より，

$$4-a=0$$

$$a=4$$

である。このとき，2 つの解は，

$$f(x)=x^2-4x+3$$
$$=(x-1)(x-3)$$

より，$x=1,\ 3$ であるから，$1<x\leqq 2$ の範囲に実数解をもたない。

x=1が解を満たさない +2

［2］　$x=2$ を解にもつとき

このとき，$f(2)=0$ より，

$$7-2a=0$$

$$a=\frac{7}{2}$$

である。

x=2が解を満たす +2

このとき，$1<x\leqq 2$ の範囲に実数解をもつ。

［3］　$x=1,\ 2$ のいずれも解にもたないとき

$f(x)=0$ が $1<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つ実数解をもつような条件を求める。

(i)　$1<x<2$ の範囲に 2 つの実数解(重解を含む)をもつとき

方針に +4

$$\begin{cases} f(1)>0 \\ f(2)>0 \\ 1<\dfrac{a}{2}<2 \\ D\geqq 0 \end{cases}$$

$2\sqrt{3}\leqq a<\frac{7}{2}$ が求められていないとき条件が正しければ +2

が成り立てばよい。まず，$f(1)=4-a>0$ より $a<4$ であり，$f(2)=7-2a>0$ より $a<\frac{7}{2}$ である。また，$1<\frac{a}{2}<2$ より，$2<a<4$ を満たす。最後に $D=a^2-12\geqq 0$ より，$a\leqq -2\sqrt{3}$，$a\geqq 2\sqrt{3}$ を満たす。以上より，

$$2\sqrt{3}\leqq a<\frac{7}{2}$$

である。

1<x<2の範囲に2解を持つときの結論に +4

(ii)　$1<x<2$ の範囲にただ 1 つの解(重解でない)をもつとき

$f(1)\cdot f(2)<0$ となる条件を求めればよい。

したがって，

$$(4-a)(7-2a)<0$$

$$\frac{7}{2}<a<4$$

である。

1<x<2の範囲にただ1つの解を持つときの結論に +2

以上，［1］，［2］，［3］より，求める a の値の範囲は，

$$\underline{\underline{2\sqrt{3}\leqq a<4}}$$ ……(答)

である。

答えに +2

アドバイス

2 次関数の解の配置

(1)は 2 次不等式の基本問題であった。不等号の向きのミスが起こりやすいので注意が必要である。2 次関数のグラフと合わせて考えると，不等号の向きを理解することができる。(2)では頂点の座標について，(3)では判別式についての基本的な内容を出題した。(3)の別解に記載の通り，頂点の条件からも相異なる 2 つの実数解をもつ条件を求めることができる。(4)は 2 次方程式の解の配置のオーソドックスな問題であった。解の配置では，端点，軸の位置，判別式の 3 つの要素を考える必要がある。(5)は解の配置の複雑な問題であった。範囲の一方に等号が含まれていることがポイントである。場合分けを行い，条件の漏れがないように議論していく必要がある。(5)が迷うことなく解けるようになれば，解の配置問題の理解は十分であろう。

3　三角比と図形

問題

▶ **配点　40 点**

(1)　6 点
(2)　9 点
(3)　10点
(4)　15点

▶ **出題のねらい**

1．三角比の考え方を図形問題の中で活用できるか。
2．空間図形を正しく把握できるか。
3．正弦定理・余弦定理を正しく活用できているか。
4．やや複雑な図形問題に対しても必要な量を正しく選んで処理できるか。

▶ **解答**

6

(1)　$\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　+3

$\tan 45^\circ = 1$　+3　……(答)

9

(2)　$\mathrm{AP} = x \times \dfrac{1}{\tan 30^\circ}$

$= x \times \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$= \sqrt{3}\,x$〔m〕

であり，

$\mathrm{BP} = x \times \dfrac{1}{\tan 45^\circ}$

$= x \times \dfrac{1}{1}$

$= x$〔m〕

である。よって，

$\sqrt{3}\,x = x + 100$

より，

$(\sqrt{3}-1)x = 100$

$\therefore\ x = \dfrac{100}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{100}{2}(\sqrt{3}+1)$

$= 50(\sqrt{3}+1)$

が成り立つ。以上より，

$\boxed{ア}$：3　$\boxed{イ}$：1　$\boxed{ウ}$：$50(\sqrt{3}+1)$　……(答)

である。　+3 ×3

10

(3)　(2)と同様にすると，

$\mathrm{CQ} = \sqrt{3}\,y$〔m〕

$\mathrm{DQ} = y$〔m〕

である。△QCD において，余弦定理より，

$\mathrm{CQ}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{DQ}^2 - 2\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DQ}\cdot\cos\angle\mathrm{CDQ}$

であるから，　余弦定理の利用　+5

$(\sqrt{3}\,y)^2 = 200^2 + y^2 - 2\cdot 200\cdot y\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$y^2 - 100y - 20000 = 0$

$(y-200)(y+100) = 0$

と変形できる。よって，$y>0$ より，

$y = 200$　……(答)

である。　答に　+5

【(3)の別解】

(2)と同様にすると，

$\mathrm{CQ} = \sqrt{3}\,y$〔m〕

$\mathrm{DQ} = y$〔m〕

である。点 Q から直線 CD に垂線を下ろし，その足を点 H とする。

$\angle\mathrm{QDH} = 60^\circ$

より，

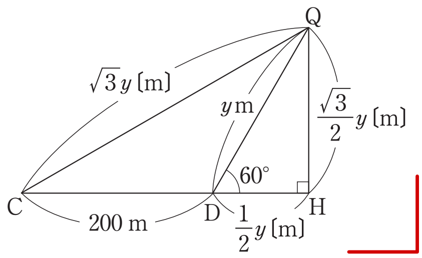
$\mathrm{DH} = y\cdot\cos 60^\circ$

$= \dfrac{1}{2}y$〔m〕

$\mathrm{QH} = y\cdot\sin 60^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}y$〔m〕

となる。



左図の状況を把握できていて　+5

△QCH において三平方の定理より，

$\mathrm{QC}^2 = \mathrm{HC}^2 + \mathrm{HQ}^2$

であるから，

$(\sqrt{3}\,y)^2 = \left(200 + \dfrac{1}{2}y\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2$

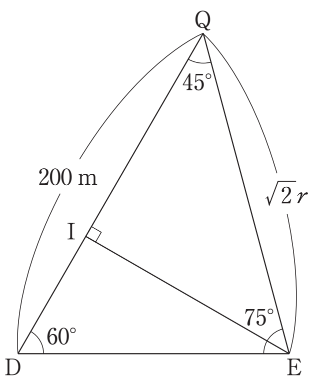
$$y^2-100y-20000=0$$
$$(y-200)(y+100)=0$$
と変形できる。$y>0$ より，
$$\underline{\underline{y=200}}$$
である。　　　　答に +5　　　　……(答)

15 (4)　(3)より，
$$\text{QD}=200\ (\text{m})$$
である。△QDE において，正弦定理より，
$$\frac{\text{QE}}{\sin 60^\circ}=\frac{200}{\sin 75^\circ}$$
正弦定理を使う

$$\therefore\quad \text{QE}=200\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$$
解に +5
$$=\frac{400\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}\ (\text{m})$$
+5

が成り立つ。よって，
$$\tan\theta=\frac{y}{\text{QE}}$$
$$=200\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{400\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$$
$$=\underline{\underline{\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$
である。　　答に +5

【(4)の別解】



+5

条件より，

上図の状況を把握できて いて

$$\angle\text{QED}=75^\circ$$
$$\angle\text{QDE}=180^\circ-120^\circ$$
$$=60^\circ$$
$$\angle\text{DQE}=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)$$
$$=45^\circ$$
となる。点 E から直線 QD に垂線を下ろし，その足を点 I とする。
$$\text{EI}=r\ [\text{m}]$$
とすると，
$$\text{DQ}=\frac{r}{\tan 45^\circ}+\frac{r}{\tan 60^\circ}$$
$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)r\ [\text{m}]$$
と表せる。これと(3)より，
$$\text{DQ}=200\ (\text{m})$$
であるから，
$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)r=200$$
$$\therefore\quad r=\frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$
EI = $\frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ に +5

が得られる。ここで，
$$\text{QE}=\sqrt{2}r\ [\text{m}]$$
より，
$$\text{QE}=\frac{200\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}\ (\text{m})$$
である。以上より，
$$\tan\theta=\frac{y}{\text{QE}}$$
$$=200\times\frac{\sqrt{3}+1}{200\sqrt{6}}$$
$$=\underline{\underline{\frac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$
である。　　答に +5

アドバイス

立体図形の把握と三角比の利用

大問を通して，測量がテーマとなっている。(1)(2)は，有名角の正接の値を用いてビルの高さを求める問題であった。有名角の三角比の値は，万が一忘れてしまっても単位円を描いて自分で求められるようにしておくとよい。

(3)(4)は(1)(2)と歩く方向が違うという設定で，電波塔の高さと地点 E からの見え方を考える問題であった。少し複雑な立体の問題だが，このような立体の問題でも平面図形で考えることが基本となる。それぞれの三角形に注目して三角比を利用すれば，順番に辺の長さを求めることができる。

このような問題では正弦定理と余弦定理がポイントとなるが，どのような場合にどちらの定理が有用なのかを整理しておこう。正弦定理は向かい合う辺と角についての関係式であり，余弦定理は 2 辺およびその間の角と残りの 1 辺の関係式である。

また，(3)(4)では，別解のように，正弦定理や余弦定理を使わずに解答することも可能である。図形の問題では，複数の視点から考えることも重要

となる。

英語 数学 国語

4 確率

問題

▶ **配点　40 点**

(1)　8 点
(2)　8 点
(3)　8 点
(4)　8 点
(5)　8 点

▶ **出題のねらい**

1．問題文の設定を理解し，状況を整理して確率を求められるか。
2．期待値の求め方を習得できているか。
3．やや複雑な状況に対する条件付き確率を正しく立式して処理できるか。

▶ **解答**

8 (1)　7 枚のカードのうち，偶数のカードは 2 の数字が書かれた 2 枚と，4 の数字が書かれた 1 枚の合計 3 枚である。

よって，求める確率は，

$$\frac{3}{7}$$ ……(答)

+8

である。

8 (2)　$X+Y=7$ となる $(X,\ Y)$ の組は，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$ の 2 つであるから，求める確率は，

組まで わかっていれば +4

$$\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}\times2=\frac{4}{49}$$ ……(答)

+8

である。

8 (3)　$X+Y+Z\leqq9$ となる事象の余事象は，$X+Y+Z=10,\ 11,\ 12$ となる事象である。

余事象を用いる方針 +2

［1］　$X+Y+Z=10$ のとき

$(X,\ Y,\ Z)$ の組は，$(2,\ 4,\ 4)$，$(4,\ 2,\ 4)$，$(4,\ 4,\ 2)$ および $(3,\ 3,\ 4)$，$(3,\ 4,\ 3)$，$(4,\ 3,\ 3)$ の 6 つであるから，このときの確率は，

$$\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times3+\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}\times3=\frac{18}{343}$$

+2

である。

［２］ $X+Y+Z=11$ のとき

$(X,\ Y,\ Z)$ の組は，$(3,\ 4,\ 4)$，$(4,\ 3,\ 4)$，$(4,\ 4,\ 3)$ の３つであるから，このときの確率は，

$$\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times3=\frac{6}{343}$$

+2

である。

［３］ $X+Y+Z=12$ のとき

$(X,\ Y,\ Z)$ の組は，$(4,\ 4,\ 4)$ のみであるから，このときの確率は，

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{343}$$

+2

である。

以上［１］，［２］，［３］より，余事象の確率は，

$$\frac{18}{343}+\frac{6}{343}+\frac{1}{343}=\frac{25}{343}$$

となるから，求める確率は，

$$1-\frac{25}{343}=\frac{318}{343}$$ ……(答)

加点基準をすべて満たしているが答が違う場合は −1

である。

8 (4) X の期待値は，

$$\frac{2}{7}\times1+\frac{2}{7}\times2+\frac{2}{7}\times3+\frac{1}{7}\times4=\frac{16}{7}$$ ……(答)

+8

である。

8 (5) X，Y，Z の期待値は等しいから，(4)より，X，Y，Z の期待値の和は，

$$\frac{16}{7}+\frac{16}{7}+\frac{16}{7}=\frac{48}{7}$$

+2

である。したがって，

$X+Y+Z\geqq7$

のとき，$X+Y+Z$ の値が，X，Y，Z の期待値の和よりも大きくなる。ここで，

事象 A：$X+Y+Z\geqq7$ となる

事象 B：X が偶数である

とする。

まず，$P(A)$ について考える。以下，$\{a,\ b,\ c\}$ は X，Y，Z の数字の組み合わせを指す。

［１］ $X+Y+Z\geqq10$ のとき

これは(3)の余事象に一致するから，この確率は $\dfrac{25}{343}$ である。

［２］ $X+Y+Z=9$ のとき

$\{1,\ 4,\ 4\}$，$\{2,\ 3,\ 4\}$，$\{3,\ 3,\ 3\}$ のときに条件を満たす。この確率は，

$$\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times3+\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}\times6$$
$$+\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}=\frac{38}{343}$$

である。

［３］ $X+Y+Z=8$ のとき

$\{1,\ 3,\ 4\}$，$\{2,\ 2,\ 4\}$，$\{2,\ 3,\ 3\}$ のときに条件を満たす。この確率は，

$$\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}\times6+\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}\times3$$
$$+\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times3=\frac{60}{343}$$

である。

［４］ $X+Y+Z=7$ のとき

$\{1,\ 2,\ 4\}$，$\{1,\ 3,\ 3\}$，$\{2,\ 2,\ 3\}$ のときに条件を満たす。この確率は，

$$\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{7}\times6+\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times3$$
$$+\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times3=\frac{72}{343}$$

である。

以上［１］，［２］，［３］，［４］より，

$$P(A)=\frac{25+38+60+72}{343}$$
$$=\frac{195}{343}$$

+2

とわかる。

次に $P(A\cap B)$ を考える。

［１］ $X=2$ のとき

$X+Y+Z\geqq7$ かつ $X=2$ となる事象は，$X=2$ のもとで $Y+Z\geqq5$ となる事象に等しい。

ここで，$Y+Z\leqq4$ となるのは，$(Y,\ Z)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$ のときであるから，この確率は，

$$\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}\times6=\frac{24}{49}$$

である。したがって，$X=2$ のもとで $Y+Z\geqq5$ となる確率は，

$$\frac{2}{7}\times\left(1-\frac{24}{49}\right)=\frac{50}{343}$$

である。

［２］ $X=4$ のとき

$X+Y+Z\geqq7$ かつ $X=4$ となる事象は，$X=4$ のもとで $Y+Z\geqq3$ となる事象に等しい。

ここで，$Y+Z\leqq2$ となるのは，$(Y,\ Z)=(1,\ 1)$ のときであるから，この確率は，

$$\frac{2}{7}\times\frac{2}{7}=\frac{4}{49}$$

である。したがって，$X=4$ のもとで $Y+Z\geqq3$ となる確率は，

$$\frac{1}{7}\times\left(1-\frac{4}{49}\right)=\frac{45}{343}$$

である。

以上[1]，[2]より，

$$P(A\cap B)=\frac{50+45}{343}$$
$$=\frac{95}{343}$$

+2

となるから，求める条件付き確率は，

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{95}{343}}{\frac{195}{343}}$$
$$=\underline{\underline{\frac{19}{39}}}$$ ……(答)

+2

である。

アドバイス

確率問題の考え方

(3)は余事象を利用すると解きやすい問題である。一見すると計算が大変そうでも，余事象を利用することで楽に解けることがしばしばある。「少なくとも」という言葉が出てきている場合や，本問のように条件の否定を捉えやすい場合などは余事象の考えが使えないかを特に疑うこと。確率の問題を解く際には，余事象の考えを使えないか検討する習慣をつけておくとよい。

(4)以降は期待値に関する問題である。X の期待値を求めるには X の取り得る値とその値に対応する確率との積をそれぞれ求め，その和を計算すればよい。

(5)は条件付き確率の問題である。条件付き確率の定義式である

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

はしっかり押さえておくこと。この定義式を立てたのち，$P(A)$ と $P(A\cap B)$ をそれぞれ地道に求めていくことになる。ここでも余事象の考えが活躍する。

何を求めればよいかを明確にしつつ，余事象の考えなどを用いて工夫しつつ正確に求めることが，確率問題を攻略するカギとなる。

5　整数

英語　数学　国語

問題

▶ **配点　40 点**

(1)　4 点
(2)　6 点
(3)　6 点
(4)　10点
(5)　14点

▶ **出題のねらい**

1．約数・倍数の性質を理解できているか。
2．各数が満たす条件を整理して扱うことができるか。

▶ **解答**

4 (1)　$\underline{143=11\times 13}$ ……(答) +2

$\underline{1001=7\times 11\times 13}$ ……(答) +2

である。

6 (2)　[条件 2]より，a は整数 m を用いて $a=2^m$ と表せる。このとき，[条件 1]を満たすのは $2^{10}=1024<2^{11}=2048<2^{12}=4096$ より $m=11$ のみであるから，

$a=2^{11}=\underline{\underline{2048}}$ ……(答) +6

である。

$a=2^m$ の形がわかっていれば +3

6 (3)　[条件 3]より，b は整数 n を用いて $b=n^2$ と表せる。このとき，[条件 1]を満たすのは $44^2=1936<45^2=2025<46^2=2116$ より $n=45$ のみであるから，

$b=45^2=\underline{\underline{2025}}$ ……(答) +6

である。

$b=n^2$ の形がわかっていれば +3

10 (4)　$27\times 1001=27027$ を素因数分解すると $27027=3^3\times 7\times 11\times 13$ であるから，(1)の 1001 の素因数分解の結果と[条件 4]から，$c=3^3\times 7^p\times 11^q\times 13^r$ (p，q，r は 0 または 1)とおける。ここで，[条

素因数分解 +2

c の因数の形 +4

件１］より $2000 \leqq c \leqq 2100$ だから，

$74 < \dfrac{2000}{3^3} \leqq 7^p \times 11^q \times 13^r \leqq \dfrac{2100}{3^3} < 78$ が成り立つ。

これを満たす p，q，r の組は，$(p, q, r) = (1, 1, 0)$ のみである。したがって，c の値は

$3^3 \times 7 \times 11 = \underline{\underline{2079}}$ である。 ……(答)

答に　+4

【(4)の別解】

$27027 = 27 \times 1001$ より，［条件４］から c は 27 の倍数である。このうち，［条件１］を満たすものは，$27 \times 75 = 2025$，$27 \times 76 = 2052$，$27 \times 77 = 2079$ のいずれかである。

［１］ $c = 2025$ のとき，c は素因数として 5 を持つが，c と 1001 の最小公倍数である 27027 は素因数として 5 を持たないため不適である。

［２］ $c = 2052$ のとき，c は素因数として 2 を持つが，c と 1001 の最小公倍数である 27027 は素因数として 2 を持たないため不適である。

［３］ $c = 2079$ のとき，$2079 = 3^3 \times 7 \times 11$ であり，これは確かに［条件４］を満たす。

以上より，

$c = \underline{\underline{2079}}$ ……(答)

である。

+4 (5) ［条件５］より d は 17 の倍数である。また，(2)より a の正の約数の個数は 12 個であるから，［条件６］より d の正の約数の個数は 6 個である。このとき，d は素数 e，f，g を用いて，

a の正の約数の個数に　+2

$d = e^5$　または　$d = f \times g^2$

のいずれかの形で表される。(ただし，$f \neq g$ である。)

［１］ $d = e^5$ のとき，$e = 17$ とすると $17^5 > 17^3 = 4913 > 2100$ だから，題意を満たさない。

$d = e^5$ の形は条件を満たさないことに　+2

［２］ $d = f \times g^2$ のとき，$f = 17$ または $g = 17$ のいずれかが成り立つ。

(i) $f = 17$ のとき

［条件１］より，$2000 \leqq 17 \times g^2 \leqq 2100$ が成り立つ。したがって，$117.6 < g^2 < 123.6$ であり，これを満たすのは $g = 11$ のみである。しかし，このとき $d = 11^2 \times 17$ と $187 = 11 \times 17$ の最大公約数は 187 となるから，［条件５］に矛盾するため不適である。

$d = 17 \times g^2$ の形は条件を満たさないことに　+2

(ii) $g = 17$ のとき

［条件１］より，$2000 \leqq f \times 17^2 \leqq 2100$ が成り立つ。したがって，$6.92 < f < 7.27$ であり，これを満たすのは $f = 7$ のみである。このとき，$d = 7 \times 17^2 = 2023$ であり，これは確かに［条件５］を満たす。

以上より，

$d = \underline{\underline{2023}}$ ……(答)

+4

である。また，このとき d の正の約数の総和は，

$(7^0 + 7^1)(17^0 + 17^1 + 17^2) = \underline{\underline{2456}}$ ……(答)

+2

である。

アドバイス

約数・倍数の性質の応用

大問全体を通して，整数を様々な視点から注目することが求められる。普段から，個々の整数にどのような性質があるのか多面的に捉える癖をつけておきたい。

(1)は素因数分解についての小問である。素因数分解は倍数の判定法に基づいて，2，3，5 の倍数かどうかを判断した後，7，11，13 などの小さい素数で順に割り算するとよい。なお，自然数 N の素因数分解を考えるときは，$\sqrt{N}$ 以下の素数を確認すれば十分である。

(4)は最小公倍数を利用する小問である。1001 と 27027 の素因数分解の結果から，c がどのような素因数を持ち得るかを考える。

(5)は約数の個数に注目した小問である。本問において最も重要な点は，約数の個数から素因数分解の形に気づけるかどうかである。普段あまり用いない着眼点であるが，このように多角的な発想を持つことが大切である。