神戸大本番レベル模試(文系)

解答・解説・採点基準

全３問　８０分　７５点満点

1.　（２５点）

【解答・採点基準】

(1)　　**(1)　6 点**

関数 f(x)を展開すると、$f(x)=x^2-(a+b)x+ab$となる。軸は$x=\frac{a+b}{2}$と表されるから、

$$\frac{a+b}{2}=0$$

$$a+b=0 \quad ・・・①$$

①式に‥2 点

C と x 軸の 2 交点の x 座標は a,b であり、a<0<b より、

$$b-a=1 \quad ・・・②$$

②式に‥2 点

①・②の連立方程式を解くと、$a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$と求められ、これは a<0<b を満たす。よって、2 次関数 y=f(x)は、

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2-\frac{1}{4}$$

…(答)

と定められる。

答‥2 点

(2)　　**(2)　6 点**

C の点接線の傾きは、

$$f'(t)=2t$$

と表される。接線と法線は垂直に交わることから、2 直線の傾きの積は-1 となる。すなわち、$t\neq0$より、l の傾きは$-\frac{1}{2t}$である。

接線の傾きの導出‥3 点

l は(t,f(t))を通るので，l の方程式は、

$$y-\left(t^2-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2t}(x-t)$$

$$\underline{\underline{y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{4}}}$$ …(答)

答‥3 点

と表される。

(3)

(3) 6 点

l と C の交点の x 座標を求める式は、

$$x^2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{4}$$

$$x^2+\frac{1}{2t}x-t^2-\frac{1}{2}=0$$

$$(x-t)\left(x+t+\frac{1}{2t}\right)=0$$

因数分解に‥3 点

を満たす。求める x 座標を $\alpha\,(\alpha \neq t)$とおくと、法線 l は点 A を通ることから t と α はこの方程式の解なので、解と係数の関係より、

$$t+\alpha=-\frac{1}{2t}$$

$$\underline{\underline{\alpha=-t-\frac{1}{2t}}}$$ …(答)

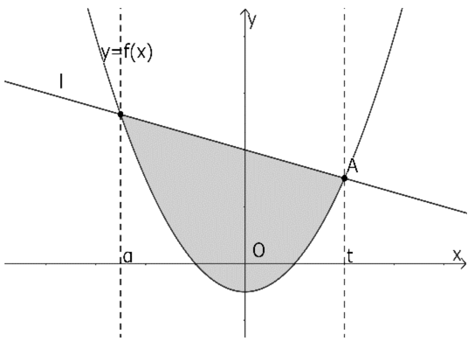
答‥3 点

と表される。$-t-\frac{1}{2t}<0<t$より，$\alpha \neq t$を満たす。

(4)

(4)　7 点

S は右図灰色部分の図形の面積である。(3)より，l:　$y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{4}$　と C:y=f(x)の交点の x 座標は t とαであるから、



$$S=\int_{\alpha}^{t}\left(-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{4}-f(x)\right)dx$$

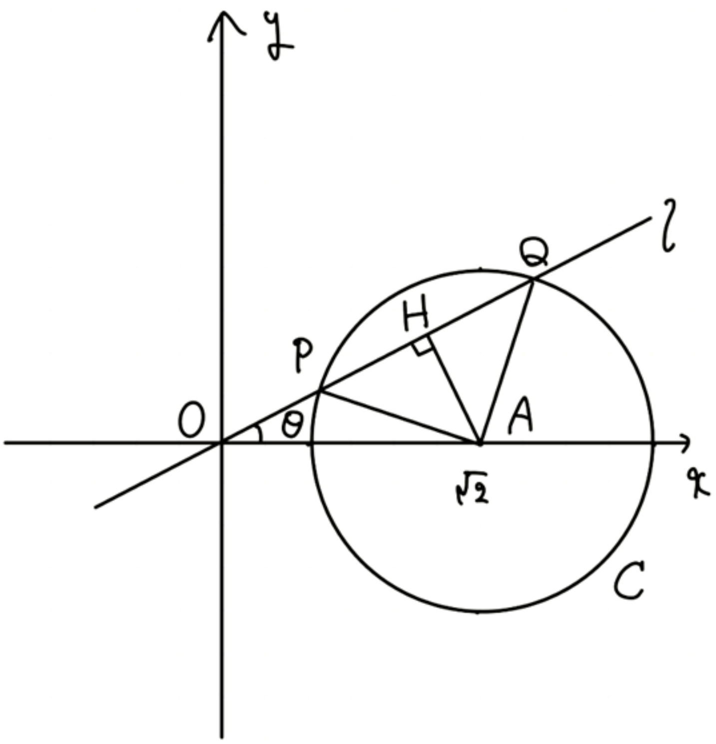
S の立式に‥1 点

$$=-\int_{\alpha}^{t}(x-t)(x-\alpha)dx$$ $$=\frac{1}{6}(t-\alpha)^3$$ $$=\frac{1}{6}\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^3$$	**定積分の計算結果に‥2 点**
ここで、$2t>0, \frac{1}{2t}>0$なので、相加平均と相乗平均の大小関係より、 $$2t+\frac{1}{2t}\geq 2\sqrt{2t\times\frac{1}{2t}}=2$$ 等号が成立するとき、 $$4t^2=1$$ $$t=\frac{1}{2}\ (t>0)$$	
$2t+\frac{1}{2t}$が最小のとき S も最小となるので、S の最小値は$\frac{4}{3}$となり、このとき$t=\frac{1}{2}$である。	**S の最小値に‥2 点** **そのときの t の値に‥2 点**

２．　（２５点）

【解答・採点基準】

(1)



A から l に垂線をおろし，その交点を H とする。$\mathrm{AO} = \sqrt{2}, \angle\mathrm{AOH} = \theta$であるから，

$$\mathrm{AH} = \sqrt{2}\sin\theta$$

である。AHが C の半径である 1 よりも小さければよいので，

$$\sqrt{2}\sin\theta < 1$$

$$\therefore \sin\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$より，$\theta$のとりうる値の範囲は

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{答})$$

である。

(1)　8点

$\mathrm{AH} = \sqrt{2}\sin\theta$に

‥4点

答‥4点

(1)[別解 1] l の方程式は$y=(\tan\theta)x$，すなわち$(\tan\theta)x-y=0$と表せる。 A と l の距離をdとすると，点と直線の距離の公式より， $d=\dfrac{\lvert(\tan\theta)\sqrt{2}-0\rvert}{\sqrt{(\tan\theta)^2+(-1)^2}}$ $=\dfrac{\lvert\sqrt{2}\tan\theta\rvert}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$ $=\dfrac{\sqrt{2}\tan\theta}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}}\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\text{より }\tan\theta>0,\text{かつ}\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)$ $=\dfrac{\sqrt{2}\tan\theta}{\dfrac{1}{\cos\theta}}\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\text{より }\cos\theta>0\right)$ $=\sqrt{2}\sin\theta$ である。(以下同様のため省略) ・・・ $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$ である。	(1)[別解 1] 8 点 $d=\sqrt{2}\sin\theta$ に ‥4 点 答‥4 点
(1)[別解 2] C の方程式は， $$\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2=1$$ であるので，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$において，l の方程式$y=(\tan\theta)x$を用いてyを消去し，整理して得られるxの 2 次方程式 $(1+\tan^2\theta)x^2-2\sqrt{2}x+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$ が 2 つの相異なる実数解をもつようなθの条件を求めればよい。この 2 次方程式の判別式を D とすると， $$\frac{D}{4}=\left(\sqrt{2}\right)^2-(1+\tan^2\theta)=(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)>0$$ であればよい。$0<\theta<\frac{\pi}{2}$のもとでは$\tan\theta>0$なので$1+\tan\theta>0$である。 ゆえに，求める条件は，	(1)[別解 2] 8 点 判別式を θ の式で表して‥4 点

$$1-\tan\theta>0$$

$$\therefore 0<\theta<\frac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

答‥4点

である。

(2)

(2) 8点

△APQ は$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}=1$の二等辺三角形であるから，H は線分 PQ の中点である。

H が線分 PQ の中点である‥2点

したがって，三平方の定理より，

$$\mathrm{PH}^2=\mathrm{AP}^2-\mathrm{AH}^2$$
$$=1^2-\left(\sqrt{2}\sin\theta\right)^2$$
$$=1-2\sin^2\theta$$
$$=\cos 2\theta$$

PH^2 を θ の式で表して‥2点

となる。$\mathrm{PH}>0$であり，$0<\theta<\frac{\pi}{4}$では$\cos 2\theta>0$であるから，

$$\mathrm{PH}=\sqrt{\cos 2\theta}$$

である。ゆえに，

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{AH}=2\sqrt{\cos 2\theta}\cdots\cdots\cdots(\text{答})$$

答‥4点

となる。

(2)[別解]

(2)[別解] 8点

(1)の[別解 2]の式(*)の 2 つの相異なる実数解を$\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$とおく。解と係数の関係より，

解と係数の関係の利用‥2点

$$\alpha+\beta=\frac{2\sqrt{2}}{1+\tan^2\theta}\quad \text{かつ}\quad \alpha\beta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}$$

であるから，

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{1+\tan^2\theta}\right)^2-\frac{4}{1+\tan^2\theta}}$$
$$=\frac{2\sqrt{1-\tan^2\theta}}{1+\tan^2\theta}$$
$$=2\cos^2\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}$$

$\beta-\alpha$ を θ の式で表して‥2点

である。ここで，αとβは P と Q のx座標を表すこと，および直線 l とx軸の正の向きとなす角がθであることから，

$$\mathrm{PQ}\cos\theta=\beta-\alpha$$

となる。したがって， $$\begin{aligned}PQ &= 2\cos\theta\sqrt{1-\tan^2\theta}\\ &= 2\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\\ &= 2\sqrt{\cos 2\theta}\cdots\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$ となる。	答‥4 点
(3) △APQ の面積を S とすると， $$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}PQ\cdot AH\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\cos 2\theta}\cdot\sqrt{2}\sin\theta\\ &= \sqrt{2(1-2\sin^2\theta)\sin^2\theta}\\ &= \sqrt{-4\sin^4\theta+2\sin^2\theta}\\ &= \sqrt{-4\left(\sin^2\theta-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}}\end{aligned}$$	(3) 9 点 S を θ の式で表して‥2 点 平方完成に‥3 点
となる。すなわち，S が最大となるのは根号内が最大になるときである。 ここで，θが$0<\theta<\frac{\pi}{4}$で変化するとき，$\sin^2\theta$は$0<\sin^2\theta<\frac{1}{2}$を満たすすべての値をとる。	$0<\sin^2\theta<\frac{1}{2}$ ‥2 点
ゆえに，$\sin^2\theta=\frac{1}{4}$のとき S が最大となる。$0<\theta<\frac{\pi}{4}$において$\sin\theta>0$なので， $$\sin\theta=\frac{1}{2}$$ $$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}\cdots\cdots\cdots(答)$$ となる。	答‥2 点
(3)[別解] △APQ の面積を S とすると，$AP=AQ=1$より， $$S=\frac{1}{2}AP\cdot AQ\sin\angle PAQ=\frac{1}{2}\sin\angle PAQ$$ となる。すなわち，$\sin\angle PAQ$が最大となるときに S は最大となる。	(3)[別解] 9 点 $\sin\angle PAQ$ が最大となるとき S が最大に‥3 点

ここで，θが$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$で変化するとき，$\angle\mathrm{PAQ}$は$\pi > \angle\mathrm{PAQ} > 0$を満たすすべての値をとる。

ゆえに，$\sin\angle\mathrm{PAQ}$は最大値 1 を$\angle\mathrm{PAQ} = \frac{\pi}{2}$のときにとり，このとき S は最大となる。$\angle\mathrm{PAQ} = \frac{\pi}{2}$のとき，$\triangle\mathrm{APQ}$ は$\mathrm{AP} = \mathrm{AQ} = 1$の直角二等辺三角形であるから，$\mathrm{PQ} = \sqrt{2}$である。(2)の結果より，

$$2\sqrt{\cos 2\theta} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{\cos 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。両辺正であるから，両辺を 2 乗しても同値なので，

$$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$$

であり，$0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$であるから，

$$2\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{答})$$

となる。

$\pi > \angle\mathrm{PAQ} > 0$ ･･2 点

$\angle\mathrm{PAQ} = \frac{\pi}{2}$のときに S が最大となること･･2 点

答･･2 点

３．　（２５点）

【解答・採点基準】

(1)

整数が偶数になる条件は，下一桁が偶数であることである． 7枚のカードのうち，偶数のカードは 0,2,4,6 の 5 枚である．

[1] 下一桁が 0 のとき

このとき整数は

$$1\cdot 6\cdot 5=30(\text{個})$$

できる．

[2] 下一桁が 2,4,6 のとき

このとき整数は

$$3\cdot 5\cdot 5=75(\text{個})$$

できる．

以上[1],[2]より，カードで作られる 3 桁の整数のうち，偶数であるものは

$$30+75=105(\text{個})\qquad\cdots\text{(答)}$$

である．

(2)

整数が 4 の倍数になる条件は，下二桁が 4 の倍数であることである．

0 から 6 のカードで作れる二桁の 4 の倍数は,04,12,16,20,24,32,36,40,52,56,60,64 の 12 個である．

[1] 下二桁に 0 を含むとき

下二桁に 0 を含むものは, 4 個ある．このとき整数は

$$4\cdot 5=20(\text{個})$$

できる．

[2] 下二桁に 0 を含まないとき

下二桁に 0 を含まないものは, 8 個ある．このとき整数は

$$8\cdot 4=32(\text{個})$$

できる．

以上[1],[2]より，カードで作られる 3 桁の整数のうち, 4 の倍数であるものは

(1)　8 点

一の位が 0 のときの場合の数に‥3 点

一の位が 0 以外のときの場合の数に‥3 点

答‥2 点

(2)　8 点

下二桁を 12 種類求められていて‥2 点

下二桁に 0 を含むときの場合の数に‥2 点

下二桁に 0 を含まないときの場合の数に‥2 点

$20+32=52$(個)　　　…(答) である．	答‥2 点
(3) kを自然数として，$\sqrt{n^2+1000}=k$ とおく．両辺を 2 乗すると， $n^2+1000=k^2$ $\therefore\ k^2-n^2=1000$ $\therefore (k+n)(k-n)=1000$ n,kは自然数より，$k+n>100$ である．さらに， $(k+n,k-n)=(a,b)$とすると，$(n,k)=(\frac{a-b}{2},\frac{a+b}{2})$より，$n,k$が自然数 となるためには，$a+b,a-b$は偶数である必要がある．よって，$a,b$ はともに偶数である。ゆえに， $(k+n,k-n)=(500,2),(250,4),(100,10),(50,20)$ $(n,k)=(249,251),(123,127),(45,55),(15,35)$ となる．このうち，0 から 6 のカード 3 枚で作れる整数nは，$n=123$ のみである．・・・(答)	(3)　9 点 因数分解に‥3 点 答‥6 点 (正しくないとき $k+n>100$ がわかっていれば‥2 点 a,b がともに偶数であることがわかっていれば‥2 点)