第 1 回 6 月京大本番レベル模試　（2018 年 6 月 24 日実施）

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（150 点満点）

第 1 問（30 点満点）

（1）（配点 16 点）

- $Q-P$ を因数分解した形で表して 8 点
- a_1 , a_{n+1} の条件を述べ，証明の結論を述べて 8 点

（2）（配点 14 点）

- $P=Q$ となる条件が $a_1=1$ または $a_{n+1}=1$ であることを述べて 4 点
- $a_1=1$ または $a_{n+1}=1$ のいずれの場合も $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_{n+1}(=1)$ となることを示して 8 点（各 4 点）
- 結論を述べて 2 点

第 2 問（30 点満点）

- 1 回の試行での白玉の個数についての状態遷移とその確率を示して(図でもよい)6 点
- p_1 を求めて 2 点
- $n\geqq 2$ のとき，白玉が $n-1$ 回目まで 4 個で n 回後に 2 個になる確率と，白玉が $k\ (1\leqq k\leqq n-1)$ 回後に初めて 3 個，n 回後に 2 個になる確率をそれぞれ求めて 18 点
- 答えに 4 点

第 3 問（30 点満点）

- 条件を満たす自然数 x のすべてを x_1 , x_2 , …… x_p としたとき，これらを a で割ったものがすべて b と互いに素であり，かつ b 以下であることを示して 10 点
- $p\leqq q$ を導いて 4 点
- 条件を満たす自然数 y のすべてを y_1 , y_2 ……, y_q としたとき，これらに b を掛けたものがすべて c と互いに素であり，かつ c 以下であることを示して 10 点
- $q\leqq p$ を導いて 4 点
- 結論に 2 点

第 4 問（30 点満点）

- 接線 l の方程式を求めて 2 点
- C 上の点 $(t,\ at^2+bt)$（t 以外のパラメータでもよい）における接線の方程式を求めて 2 点
- 2 つの接線が一致する条件から，$g(x)$ の式を t で表して 4 点
- C_0 と C の交点の x 座標を求めて 6 点
- 積分区間における曲線の上下を述べて 4 点
- S を求める積分の式が立てられて 4 点
- S を求め，証明できて 8 点

第 5 問（30 点満点）

- $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ など，P の位置を示すことができて 4 点
- 面積に $S=2\triangle\mathrm{ABC}$ という関係があることを説明し，$\triangle\mathrm{ABC}$ のとり得る値の範囲を求めることに帰着できて 10 点
- 辺 BC を底辺とみたときの A の存在範囲を示し，高さのとり得る値の範囲を求めて 10 点
- $\triangle\mathrm{ABC}$ のとり得る値の範囲を求めて 4 点
- 答えに 2 点

【理系】(200 点満点)

第 1 問(30 点満点)

(1)(配点 16 点)

- $Q-P$ を因数分解した形で表して 8 点
- a_1, a_{n+1} の条件を述べ，証明の結論を述べて 8 点

(2)(配点 14 点)

- $P=Q$ となる条件が $a_1=1$ または $a_{n+1}=1$ であることを述べて 4 点
- $a_1=1$ または $a_{n+1}=1$ のいずれの場合も $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_{n+1}(=1)$ となることを示して 8 点(各 4 点)
- 結論を述べて 2 点

第 2 問(35 点満点)

(1)(配点 28 点)

- 1 回の試行での白玉の個数についての状態遷移とその確率を示して(図でもよい)6 点
- p_1 を求めて 2 点
- $n \geqq 2$ のとき，白玉が $n-1$ 回目まで 4 個で n 回後に 2 個になる確率と，白玉が $k\ (1 \leqq k \leqq n-1)$ 回後に初めて 3 個，n 回後に 2 個になる確率をそれぞれ求めて 16 点
- 答えに 4 点

(2)(配点 7 点)

- 途中の計算と答えに 7 点

第 3 問(30 点満点)

- $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ の対称点を $\mathrm{B}'(\beta')$, $\mathrm{C}'(\gamma')$ とするとき，$\beta'=\gamma+\alpha$, $\gamma'=\alpha+\beta$ を導いて 4 点
- 四角形 $\mathrm{BCB'C'}$ は平行四辺形であることを示して 6 点
- 四角形 $\mathrm{BCB'C'}$ が長方形となる条件が $\mathrm{OA} \perp \mathrm{BC}$ と同値であることを述べて 4 点
- 上記の条件が $\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}$ が純虚数であることを述べ，$\dfrac{\gamma-\beta}{\alpha}+\dfrac{\overline{\gamma}-\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}=0$ まで導いて 6 点
- 上記の式を α, β, γ のみの式で表して 4 点
- $\beta\gamma=\alpha^2$ を示せて 6 点

第 4 問(35 点満点)

(1)(配点 20 点)

- 有理数の解を $\dfrac{p}{q}$ (p は整数, q は正の整数で p と q は互いに素)のように設定できて 2 点
- 上記の設定のもと，q が p^3 の約数であることを説明して 6 点
- $q=1$, $p=\pm1$ となることまで説明できて 8 点
- 証明の結論を述べられて 4 点

（2）（配点 15 点）

- 実数係数の 3 次方程式であることから，少なくとも 1 つの実数解をもつことを述べて 3 点
- 実数解をすべて有理数と仮定したとき，(1)からすべて 1 となることを述べて 3 点
- a, b の関係式を求め，3 次方程式の左辺を因数分解して 4 点
- 因数分解して現れる 2 次方程式の解の議論から証明できて 5 点

第 5 問（35 点満点）

- $f(\theta)$ を求めて 6 点
- $f'(\theta)$ を求めて 4 点
- $f(\theta)$ の増減を示して 5 点
- $m(\alpha)$ を求めて 6 点
- $\dfrac{m(\alpha)}{\alpha^2}$ を極限を求められる形まで変形できて 6 点
- 途中の計算と答えに 8 点

第 6 問（35 点満点）

（1）（配点 20 点）

- $f(x)=(1+ax)-(1+x)^a$ $(x \geqq 0)$ のようにおいたとき，$f'(x)>0$ $(x>0)$ を示し，さらに $f(x)>0$ となることを示して 6 点
- $g(x)=x^2-(1+ax)+(1+x)^a$ $(x \geqq 0)$ のようにおいたとき，$g'(x)$, $g''(x)$ を求めて 4 点
- $g''(x)>0$ $(x>0)$ から $x>0$ で $g'(x)>0$, $g(x)>0$ を順次導いて 8 点
- 証明の結論を述べて 2 点

（2）（配点 15 点）

（ i ）（配点 3 点）

- 証明できて 3 点

（ii）（配点 12 点）

- （1）と（ i ）より，$\dfrac{y}{x}<a<\dfrac{y}{x}+x$ を導いて 5 点
- $\dfrac{y}{x}$ の値を計算で絞り込んで 5 点
- 証明できて 2 点