最終　１月京大本番レベル模試　（2018 年 1 月 26 日実施）

採点基準　数学（文科・理科）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（150 点満点）

第 1 問（30 点満点）

- 点 P における接線の方程式を求め，点 A, B の座標を求めて 4 点
- $\triangle$AOB の面積を t で表して 4 点
- T と，K と x 軸で囲まれた図形の面積をそれぞれ t で表して 5 点
- t で表した面積の関係式を整理して，$f(t)=5t^4-4t^3+2t-1$ のようにおき，$f(t)$ が $t>\dfrac{1}{2}$ において単調増加であることを示して 9 点
- $f\left(\dfrac{3}{5}\right), f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ をそれぞれ計算して，$f\left(\dfrac{3}{5}\right)<0, f\left(\dfrac{2}{3}\right)>0$ を示して 6 点(各 3 点)
- 証明の結論を述べて 2 点

第 2 問（30 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $\cos\alpha$ を求めて 2 点
- a_{n+1}，a_{n-1} をそれぞれ a_n と $\cos n\alpha$ を用いて表して 10 点(各 5 点)
- $\sin\alpha, \cos\alpha$ を消去して，a_{n+1}, a_n, a_{n-1} の漸化式を導いて 4 点
- a_1, a_2 をそれぞれ求めて 2 点
- 証明の結論を述べて 2 点

(2)（配点 10 点）

- (1)で求めた漸化式から，a_n と a_{n+2} を 10 で割った余りが等しくなることを示して 6 点
- 答えに 4 点

第 3 問（30 点満点）

- G_n と G_{n-1} の関係式を n 回目に出た目で場合分けして求めて 4 点
- n 回中 5 の目が出る回数を l，6 の目が出る回数を m のように表し，$G_n \geqq 2n-4$ を l, m, n の関係に言い換えて 8 点
- 条件を満たす l, m の組を求めて 8 点
- 確率を求める式が立式できて 5 点
- 答えに 5 点

第 4 問（30 点満点）

- P の座標を求めて 4 点
- 2 点 A, B が直線 $y = x$ に関して対称であるための条件を述べて 4 点
- 2 点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β としたとき，OP ⊥ AB となる α, β の条件式を導いて 4 点
- 線分 AB の中点が直線 OP 上にあるための α, β の条件式を導いて 5 点
- 正しく a の条件を求めて 9 点
- 証明できて 4 点

第 5 問（30 点満点）

(1)（配点 10 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{PE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PF}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ で表して 6 点(各 3 点)
- $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表し，結論を述べて 4 点

(2)（配点 20 点）

- 問題文の条件より，PC = PD かつ $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{PD}}) = 0$ となることを導いて 10 点
- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ で表して 4 点
- 証明できて 6 点

【理科】（200 点満点）

第 1 問（30 点満点）

- $y=1, 2$ のときの p, x の値を求めて 4 点(各 2 点)
- $y \geqq 3$ のとき，$y^2-y+1>y+1$ を導いて 6 点
- $y \geqq 3$ のとき，$y+1=p^{\alpha}$, $y^2-y+1=p^{\beta}$, $\alpha+\beta=x, 1 \leqq \alpha<\beta$ を満たす整数 α, β が存在することを述べて 6 点
- $y \geqq 3$ のとき，条件を満たす p, x, y が存在しないことを述べて 12 点
- 答えに 2 点

第 2 問（35 点満点）

- $f_n(x)$ が e^x, $-e^{-x}$, e^{-x}, $-e^{-x}$ のいずれかとなる状態推移を表して 6 点
- e^x, $-e^{-x}$, e^{-x}, $-e^{-x}$ となるそれぞれの確率を設定し，漸化式を導いて 13 点
- e^x となる確率だけで表した漸化式を求めて 6 点
- n が偶数，奇数の場合に分けて e^x となる確率を考えて 6 点
- 答えに 4 点

第 3 問（35 点満点）

(1)（配点 10 点）

- α, β, γ がいずれも a と異なることを示して 6 点
- α, β, γ のどの 2 つも異なることを示して 4 点

(2)（配点 25 点）

- P, Q, R が三角形の 3 頂点をなすことを示して 3 点
- 三角形 PQR が点 a を重心とする正三角形であることを示して 6 点
- 三角形 PQR の外接円の半径を求めて 13 点
- 答えに 3 点

第 4 問（30 点満点）

(1)（配点 10 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{PE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PF}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ で表して 6 点(各 3 点)
- $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表し，結論を述べて 4 点

(2)（配点 20 点）

- 問題文の条件より，$\mathrm{PC}=\mathrm{PD}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PC}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}})=0$ となることを導いて 10 点
- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ で表して 4 点
- 証明できて 6 点

第 5 問（35 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $x\left(\geqq \dfrac{1}{3}\right)$ に対して $\dfrac{2}{2x+1}<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{3}{3x+1}$ を示せばよいことを導いて 4 点
- $f(x)=\dfrac{3}{3x+1}-\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ \left(x\geqq \dfrac{1}{3}\right)$ のようにおいたとき，$f(x)$ が $x\geqq \dfrac{1}{3}$ で減少関数であることを示して 4 点
- $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{3}{3x+1}$ を示して 4 点
- $g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{2}{2x+1}\ \left(x\geqq \dfrac{1}{3}\right)$ のようにおいたとき，$g(x)$ が $x\geqq \dfrac{1}{3}$ で減少関数であることを示して 4 点
- $\dfrac{2}{2x+1}<\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ を示して 4 点

(2)（配点 15 点）

- (1)で示した不等式から $\dfrac{(x+1)^{x+\frac{1}{3}}}{x^{x+\frac{1}{3}}}<e<\dfrac{(x+1)^{x+\frac{1}{2}}}{x^{x+\frac{1}{2}}}\ \left(x\geqq \dfrac{1}{3}\right)$ を導いて 3 点
- 上記の x に $x=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ を代入した式を具体的に書き出して 8 点
- 辺々乗じることで証明できて 4 点

第 6 問（35 点満点）

(1)（配点 8 点）

- 平面 $z=t$ による断面 J を不等式で表して 4 点
- 正しく図示できて 4 点

(2)（配点 27 点）

- $\angle\mathrm{AOB}=\alpha$ とおいたとき，$t=\cos^2\alpha$ を導いて 4 点
- J の面積を $S(t)$ としたとき，$S(t)$ を α で表して 9 点
- 置換積分を行い，体積を求める定積分の式が立てられて 9 点
- 途中の計算と答えに 5 点