2023 年度第 1 回京大本番レベル模試

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】（200 点満点）

第1問　(30 点満点)

- 条件を満たす x, y, z の組が存在するという仮定の下，$2x^2 \equiv y^2 \pmod{3}$ を述べて 10 点
- 3 を法としたとき任意の整数 n に対して，$n^2 \equiv 0$ または $n^2 \equiv 1$ であることを述べて 4 点
- $2x^2 \equiv y^2 \pmod{3}$ が成り立つとき，x, y がともに 3 の倍数でなければならないことを述べて 6 点
- x, y, z の最大公約数が 1 であることから，z が 3 で割り切れないことを述べて 4 点
- 題意の等式を $2024x^2 - y^2 = 3z^2$ としたとき，左辺が 3^2 で割り切れるが，右辺が 3^2 で割り切れないことから矛盾を述べて 6 点

第 2 問　(35 点満点)

- k 回目の試行後に左端の数字が 1 である確率を q_k のように設定して 7 点
- 上記の設定のもと $q_1 = \dfrac{1}{n}$ を述べて 3 点
- 数列 $\{q_k\}$ に関する漸化式を立てて 7 点
- 数列 $\{q_k\}$ の一般項を求めて 8 点
- $k = n$ として p_n を求めて 5 点
- $\lim_{n \to \infty} p_n$ を求めて 5 点

第 3 問　(35 点満点)

- z_1 , z_2 を極形式で表して 4 点
- z を極形式で表して 8 点
- $z_1 z_2$ を r_1 , r_2 , θ_1 を用いた極形式で表して 4 点
- w を極形式で表し，$|w|$ と $\arg(w)$ を求めて 4 点
- $|w|$ の値の範囲を求めて 4 点
- $\arg(w)$ のとり得る値の範囲を求めて 4 点
- 図示に 7 点

第 4 問　(35 点満点)

- N を求める計算と答えに 5 点
- 最高位の数字 a が満たす不等式(解答解説の②の式)を求めて 5 点
- $10^{0.602} < \dfrac{2^{1002}}{10^{301}} < 10^{0.63206}$ を求めて 5 点
- $\dfrac{2^{1002}}{10^{301}} < 5$ を示して 5 点
- $4 < \dfrac{2^{1002}}{10^{301}}$ を示して 10 点
- 答えに 5 点

第 5 問　(30 点満点)

- $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$ としたうえで $0 = \left|\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}}\right|^2$ の右辺を展開した式に 6 点
- $(J =)\ \mathrm{AG}^2 + \mathrm{BG}^2 + \mathrm{CG}^2 = \dfrac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2}{3}$ を求めて 6 点
- 相加・相乗平均の関係から $J \geqq \sqrt[3]{\mathrm{BC}^2\mathrm{CA}^2\mathrm{AB}^2}$ を示して 6 点
- S を R と三角形 ABC の 3 辺の長さで表して 6 点
- 残りの証明に 6 点

第 6 問　(35 点満点)

(1)　(配点 17 点)

- $g'(x)$, $g''(x)$ の計算に 5 点(前者が 2 点，後者が 3 点)
- $g''(x)$ 中の $(x+1)\log x + 2(1-x)$ を $h(x)$ のようにおいたとき，$h'(x)$ が $0 < x < 1$ で単調減少であることを示して 6 点
- 上記の $h(x)$ が $0 < x < 1$ で単調増加であることを示し，さらに $\lim\limits_{x \to 1-0} h(x) = 0$ から $h(x) < 0$ を述べて 4 点
- $g'(x)$ の増減の結論を述べて 2 点

(2)　(配点 18 点)

- $y = f(x)$ のグラフが直線 $x = \dfrac{1}{2}$ に関して対称であることを述べ，$0 < x \leqq \dfrac{1}{2}$ における $f(x)$ のとり得る値の範囲を求める方針に 2 点
- $f'(x) = g'(x) - g'(1-x)$ を述べて 2 点
- $f(x)$ が $0 < x < \dfrac{1}{2}$ において単調減少であることを示して 2 点
- $\lim\limits_{x \to +0} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 1-0} g(x)$ を求めて 6 点(前者が 2 点，後者が 4 点)

- $\lim_{x \to +0} f(x)$ を求めて 2 点
- $f\left(\frac{1}{2}\right)$ および $f(x)$ のとり得る値の範囲に 4 点(各 2 点)