2023 年度第 2 回京大本番レベル模試

採点基準　数学（文系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（150 点満点）

第1問　(30 点満点)

問 1（配点 16 点）

- $x=\sin\theta-\cos\theta$, $y=\sin^3\theta-\cos^3\theta$ のようにおき，θ を消去して x, y の関係式を求めて 6 点
- 上記の x のとり得る値の範囲を求めて 2 点
- 上記の x の関数の増減を調べて 3 点
- 図示に 5 点

問 2（配点 14 点）

- $(a_1, a_2)=(147, 91)$ として割り算を実行（$147=91+56$, $91=56+35$, $56=35+21$, $35=21+14$, $21=14+7$）して 5 点
- $a_1=147$, $a_2=91$, $a_3=56$, $a_4=35$, $a_5=21$, $a_6=14$, $a_7=7$ が条件(i)(ii)(iii)を満たすことを述べて 2 点
- $(a_1, a_2)=(203, 126)$ として割り算を実行（$203=126+77$, $126=77+49$, $77=49+28$, $49=28+21$, $28=21+7$）して 5 点
- $a_1=203$, $a_2=126$, $a_3=77$, $a_4=49$, $a_5=28$, $a_6=21$, $a_7=7$ が条件(i)(ii)(iii)を満たすことを述べて 2 点

※　上記の 2 組以外 $(a_1, a_2)=(210, 133)$, $(203, 147)$ とした場合も同様に配点, 上記の 2 つと合わせ，4 つのうちの 2 つの組合せにて採点

第 2 問　(30 点満点)

- サイコロ A, B を同時に 1 回投げたときに出た目をそれぞれ X, Y としたとき，XY を 3 で割った余りを表，あるいは同内容で表して 6 点
- Z_n を 3 で割った余りが 1，2 となる確率 q_n, r_n を設定して 4 点
- p_{n+1} を p_n, q_n, r_n で表して 8 点
- $p_n+q_n+r_n=1$ を利用して，p_{n+1} を p_n だけの式で表して 4 点
- 残りの計算と答えに 8 点

第 3 問　(30 点満点)

- 四角形 ABCD の外接円の中心 O に対して，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|$ を述べて 3 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ で定まる点 H が △ABC の垂心であることを示して 6 点
- 上記の点 H が H_1 に一致することを述べ，$\overrightarrow{\mathrm{OH}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を述べて 3 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OH}_1}$ と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OH}_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}_3}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}_4}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の必要なものを用いて表して 3 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる点 P の設定に 4 点
- 上記の P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{PH}_1}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を示して 4 点
- $\overrightarrow{\mathrm{PH}_1}$ と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{PH}_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{PH}_3}$, $\overrightarrow{\mathrm{PH}_4}$ をそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の必要なものを用いて表して 3 点
- 残りの証明に 4 点

第 4 問　(30 点満点)

- 題意の方程式を $\log_2 x=t$ とおき，題意が $\left|t(t-2)\right|=a$ が異なる 4 つの実数解をもつことと同値であることを述べて 4 点
- a のとり得る値の範囲を求めて 2 点
- 題意の方程式の 4 つの解を x_1, x_2, x_3, x_4 $(0<x_1<x_2<x_3<x_4)$ としたとき，これらが等比数列をなす条件を $\log_2$ の等差条件に直して 4 点
- $\log_2 x_k=t_k$ $(k=1,\,2,\,3,\,4)$ とおき，上記を t_k に関する条件に直して 3 点
- t_k $(k=1,\,2,\,3,\,4)$ を解にもつ方程式を述べ，t_k をそれぞれ a で表して 10 点
- 残りの計算と答えに 7 点

第 5 問　(30 点満点)

- 四面体 OPQR が 1 辺の長さ 1 の正四面体であることを述べて 4 点
- 正三角形 PQR の外接円を J_1 としたとき，円 J_1 が △ABC の内接円でもあり，四面体 OABC の面 ABC のうち球 K に含まれる部分が円 J_1 の周および内部であることを示して 4 点
- 上記の円 J_1 の面積を求めて 8 点
- △OAB が平面 COP に関して対称であることを述べて 3 点
- 球 K と平面 OAB の共通部分である円を J_2 としたとき，線分 OP が J_2 の直径であること述べて 3 点
- 面 OAB のうち球 K の内部にある部分の面積を求めて 4 点
- 残りの計算と答えに 4 点