2023 年度第 2 回京大本番レベル模試

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】(200 点満点)

第1問　(35 点満点)

問 1（配点 17 点）

- $u=\dfrac{\pi}{x}$ のようにおき，$\dfrac{du}{dx}$，および積分区間の変化を調べて 4 点
- 置換積分を実行して整理した式に 5 点
- 残りの計算と答えに 8 点

問 2（配点 18 点）

- $(a_1, a_2)=(147, 91)$ として割り算を実行（$147=91+56, 91=56+35, 56=35+21, 35=21+14, 21=14+7$）して 5 点
- $a_1=147, a_2=91, a_3=56, a_4=35, a_5=21, a_6=14, a_7=7$ が条件(i)(ii)(iii)を満たすことを述べて 4 点
- $(a_1, a_2)=(203, 126)$ として割り算を実行（$203=126+77, 126=77+49, 77=49+28, 49=28+21, 28=21+7$）して 5 点
- $a_1=203, a_2=126, a_3=77, a_4=49, a_5=28, a_6=21, a_7=7$ が条件(i)(ii)(iii)を満たすことを述べて 4 点

※　上記の 2 組以外 $(a_1, a_2)=(210, 133), (203, 147)$ とした場合も同様に配点, 上記の 2 つと合わせ，4 つのうちの 2 つの組合せにて採点

第 2 問　(30 点満点)

- サイコロ A, B を同時に 1 回投げたときに出た目をそれぞれ X, Y としたとき，XY を 3 で割った余りを表，あるいは同内容で表して 6 点
- Z_n を 3 で割った余りが 1，2 となる確率 q_n, r_n を設定して 4 点
- p_{n+1} を p_n, q_n, r_n で表して 8 点
- $p_n+q_n+r_n=1$ を利用して，p_{n+1} を p_n だけの式で表して 4 点
- 残りの計算と答えに 8 点

第 3 問　(35 点満点)

- AB の長さを OA, OB の長さと θ を用いて表して（余弦定理の式に）3 点
- $\mathrm{AB}^2-(\mathrm{OA}-\mathrm{OB}\cos\theta)^2>0$ を示して 8 点
- 上記から $\mathrm{AB}>\mathrm{OA}-\mathrm{OB}\cos\theta$ を示して 8 点
- $\mathrm{AB}>\mathrm{OB}-\mathrm{OA}\cos\theta$ を示して 8 点
- 残りの証明に 8 点

第 4 問　(30 点満点)

- 四面体 OPQR が 1 辺の長さ 1 の正四面体であることを述べて 4 点
- 正三角形 PQR の外接円を J_1 としたとき，円 J_1 が△ABC の内接円でもあり，四面体 OABC の面 ABC のうち球 K に含まれる部分が円 J_1 の周および内部であることを示して 4 点
- 上記の円 J_1 の面積を求めて 8 点
- △OAB が平面 COP に関して対称であることを述べて 3 点
- 球 K と平面 OAB の共通部分である円を J_2 としたとき, 線分 OP が J_2 の直径であること述べて 3 点
- 面 OAB のうち球 K の内部にある部分の面積を求めて 4 点
- 残りの計算と答えに 4 点

第 5 問　(35 点満点)

- $\sum_{k=1}^{5}(-1)^{k-1}d_k=\cos\theta-\cos2\theta+\cos3\theta-\cos4\theta+\cos5\theta$ を述べて 7 点
- $z^{10}-z^9+z^8-z^7+z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0$ を示して 7 点
- $1-\cos\theta+\cos2\theta-\cdots\cdots-\cos9\theta+\cos10\theta=0$ を示して 7 点
- $\cos(11-k)\theta=-\cos k\theta\ \ (k=1,2,3,4,5)$ を示して 7 点
- 残りの証明に 7 点

第 6 問　(35 点満点)

(1)　(配点 17 点)

- 点 P における接線，法線の方程式をそれぞれ求め，点 Q, R の座標を求めて 4 点
- $f(p)$ を求めて 2 点
- $f'(p)$ を求めて 2 点
- $f'(p)$ を変形して現れる $\dfrac{p^2+1}{p^2-1}-\log p$ を $g(p)$ のようにおいたとき，$g(p)$ が $p>1$ で単調減少な連続関数であることを示して 2 点
- $\lim_{p\to1+0}g(p)=\infty$，$\lim_{p\to\infty}g(p)=-\infty$ を述べて 2 点
- $f(p)$ の増減を述べ，さらに $\log\alpha=\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$ を述べて 3 点

- 上記のもと証明の結論を述べて 2 点

(2) (配点 18 点)

- $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}-\log x\ (x>1)$ に対し， $g(\sqrt{12})<0$ を示して 2 点
- 曲線 $y=\log x$ 上の点 $\left(\dfrac{243}{2}, \log\dfrac{243}{2}\right)$ における接線の方程式を求めて 3 点
- $g(\sqrt{11})>0$ を示して 5 点
- $\sqrt{11}<\alpha<\sqrt{12}$ を示して 2 点
- $j(x)=\dfrac{x}{x^2-1}\ (x>1)$ のようにおいたとき， $j(x)$ が $x>1$ で単調減少であることを示して 2 点
- 残りの証明に 4 点