2023 年度第 3 回京大本番レベル模試

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は 1 点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】(200 点満点)

第1問　(35 点満点)

問 1（配点 20 点）

- $t=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ のように文字を置換して 6 点
- 置換した文字の導関数 $\dfrac{dt}{d\theta}$ と $1+t^2=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$，およびとり得る値の変化を求めて 4 点
- 上記の置換のもと計算を行い，答えを求めて 10 点

問 2（配点 15 点）

- 垂心 H が △ABC の内部にあることを述べて 3 点
- $\triangle\mathrm{ABH}+\triangle\mathrm{CAH}=\dfrac{1}{2}ap$，$\triangle\mathrm{ABH}+\triangle\mathrm{BCH}=\dfrac{1}{2}bq$，$\triangle\mathrm{BCH}+\triangle\mathrm{CAH}=\dfrac{1}{2}cr$ のいずれかを根拠と合わせて示して 8 点
- 上記のうちの残り 2 つを「同様に」で示して 2 点(各 1 点)
- 証明の結論を述べて 2 点

第 2 問　(35 点満点)

- 解答解説のように設定した集合 A のもとで，A の要素 a と $2024-a$ $(a\neq1012)$ のペアを考える発想に 6 点
- S を上記の集合 A の要素の個数で表して 6 点
- 2024 の素因数分解に 3 点
- 集合 A の要素の個数を根拠と合わせて求めて 8 点
- S, T をそれぞれ求めて 8 点(各 4 点)
- 答えに 4 点

第 3 問　(35 点満点)

(1)　(配点 20 点)

- l の方程式を求めて 2 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k(e^p, -1)$（$k$ は実数）のようにおけて，さらに $k=\dfrac{e^p(p-1)}{e^{2p}+1}$ を求めて 6 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{\mathrm{OH}^2}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を示して 3 点
- 点 Q の x 座標，y 座標をそれぞれ上記の p を用いて表して 5 点
- 答えに 4 点

(2)　(配点 15 点)

- $f(x)+\dfrac{x}{e}$ を極限を考えられる形(解答解説の⑥)に変形して 4 点
- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(1-e^{-\frac{1}{x}}\right)$ を求めて 8 点
- 答えに 3 点

第 4 問　(30 点満点)

- $n-1$ 回目までに既に条件が満たされている場合の場合の数を求めて 6 点
- $n-1$ 回目までは条件が満たされずに n 回目に条件を満たす場合の説明と場合の数に 12 点
- 上記の 2 つから漸化式を立てられて 3 点
- 上記の漸化式から mod6 で $a_1\equiv a_2\equiv 0$, $a_3\equiv 1$, $a_n\equiv -a_{n-3}$　$(n\geqq 4)$ を述べて 3 点
- a_n を 6 で割った余りが 0, 0, 1, 0, 0, 5 の繰り返しであることを述べて 3 点
- 答えに 3 点

第 5 問　(30 点満点)

- 条件を満たす四角形 ABCD が存在するとき，四角形 ABCD の外接円の直径 BE を考える方針を述べ，図が描けて 4 点
- AE, CE を d を用いて表して 4 点
- 四角形 ABCE の面積を d を用いて表して 4 点
- $\triangle\mathrm{ACD}\leqq\triangle\mathrm{ACE}$ を示して 4 点
- 条件を満たす四角形 ABCD が存在するならば $d\geqq\sqrt{17}$ であることを示して 4 点
- $d=\sqrt{17}$ となる四角形 ABCD の存在を示して 8 点
- 答えに 2 点

第 6 問　(35 点満点)

- 線分 OP の存在範囲 D' に対して D を説明して 4 点
- $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と同じ向きで，大きさが $\mathrm{OQ}+1$ であることを説明して 2 点
- 半直線 OQ と x 軸正方向のなす角を θ としたとき，xz 平面上での P の座標を θ で表して 4 点
- 上記の P の x 座標，z 座標をそれぞれ $f(\theta)$, $g(\theta)$ とおいたとき，$f(\theta)$ が $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で単調減少であることを示して 3 点
- 上記のもと，$f(0)$, $g(0)$，$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} f(\theta)$，$\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-0} g(\theta)$ を求めて 4 点
- 図形 J を $0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のときの線分 OP の存在範囲 D'' を用いて説明し概形を描いて 2 点
- 上記のもとで $V = \pi\displaystyle\int_0^2 z^2 dx$ を述べて 2 点
- $\displaystyle\int_0^2 z^2 dx$ の計算と結果に 10 点
- 答えに 4 点