2023 年第 1 回北大本番レベル模試

採点基準　数学（理系）

【共通事項】

１．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

２．分母の有理化の不備については減点なし

３．別解の配点は解答の配点に準ずる

【理系】（150 点満点）

第 1 問（30 点満点）

(1)（配点 9 点）

- 題意の連立不等式を $y \geqq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$ かつ $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2 \leqq 4$ に変形して 3 点
- 直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$ と円 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$ の 2 つの交点の座標を求めて 3 点

  （D の図示の中で与えてもよい。）
- D の図示に 3 点(境界の言及がない場合は 2 点)

(2)（配点 9 点）

- 円 C の方程式を中心と半径がわかる形に変形して 3 点
- 円 C の中心 P の x 座標，y 座標をそれぞれ t で表して 3 点
- 軌跡を求めて 3 点(直線と明記していないものは 2 点)

(3)（配点 12 点）

- 円 C と円 $(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$ が外接するときの等式に 3 点
- C と D が共有点をもつ t の最大値を求めて 2 点
- 円 C と直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$ が接するときの等式に 3 点
- 上記のときの t の値を求めて 2 点
- 円 C と直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+2$ の接点が D に含まれていることを述べて 2 点

第 2 問（30 点満点）

(1)（配点 10 点）

- b_{n+1} を b_n で表して 6 点
- 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めて 4 点

(2)（配点 20 点）

- $a_{2n+2}=-a_{2n}+1$ を求めて 3 点

- $\sum_{k=1}^{2n} a_{2k}$ を求めて 6 点
- $\sum_{k=1}^{4n} a_k$ を求める計算と答えに 11 点

第 3 問（30 点満点）

(1)（配点 8 点）

- 2 回の操作での玉の取り出し方の数を求めて 2 点
- 操作を 2 回繰り返した時点で初めて領域内の縦，横，斜めのいずれかで 3 個の玉が一列に並ぶ場合の取り出し方の数を求めて 2 点
- p_2 を求める計算と答えに 4 点

(2)（配点 10 点）

- 3 回の操作での玉の取り出し方の数を求めて 2 点
- 操作を 3 回繰り返した時点で，初めて領域内の縦，横，斜めのいずれかで 3 個の玉が一列に並ぶ場合の取り出し方について，●が含まれないときと含まれるとき，それぞれの数を求めて 4 点(各 2 点)
- p_3 を求める計算と答えに 4 点

(3)（配点 12 点）

- 操作を 3 回繰り返した時点で，領域内のどの 3 個の玉も一列に並んでいない事象を E のように表したとき，E が起こる確率 $P(E)$ を求めて 2 点
- ⑨の玉を取り出していないという事象を F のように表したとき，$E \cap F$ が起こる確率 $P(E \cap F)$ を求めて 6 点
- 上記の E, F に対して，条件付き確率 $P_E(F)$ を求める計算と答えに 4 点

第 4 問（30 点満点）

(1)（配点 10 点）

- $f(x)$ の増減を調べて 4 点
- $f(x)$ の極大値，極小値をそれぞれ求めて 4 点(各 2 点)
- $y = f(x)$ のグラフに 2 点

(2)（配点 8 点）

- $g'(x)$ を求めて 2 点
- 答えに 6 点

(3)（配点 12 点）

- $g(x)$ の極小値を与える x を β としたとき，k を β で表して 2 点
- $g(x)$ の極小値 m を上記の β だけで表して 2 点
- m を β の関数とみて $\dfrac{dm}{d\beta} = \beta f'(\beta)$ を示し，さらに β のいずれの区間でも $\dfrac{dm}{d\beta} < 0$ を示して 4 点

- kのいずれの区間に対しても題意の不等式が成り立つことを示して 4 点(各 2 点)

第 5 問（30 点満点）

(1)（配点 12 点）

- $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ をそれぞれsを用いた成分で表示して 4 点(各 2 点)
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=0$ からsの値を求めて 4 点
- $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=0$ からtの値を求めて 4 点

(2)（配点 6 点）

- 4 点B, C, P, Q の正しい位置関係を図示，あるいは説明して 2 点
- 4 点B, C, P, Q が同一円周上にあることの証明に 2 点
- 答えに 2 点

(3)（配点 12 点）

- 平面 ABC の法線ベクトル $\vec{n}$ を求めて 2 点
- 上記の $\vec{n}$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=k\vec{n}$ （kは実数）と表したとき，R の位置ベクトルをkで成分表示して 1 点
- $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の成分表示，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の大きさをそれぞれ求めて 4 点(各 2 点)
- 上記のkを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の成分表示，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の大きさをそれぞれ求めて 2 点(各 1 点)
- PQ＝PR となるkの等式に 1 点
- 答えに 2 点(各 1 点)