第2回11月阪大本番レベル模試　（2018年11月4日実施）

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は1点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（100点満点）

第1問（30点満点）

(1)（配点15点）

- 頂点A, Cのいずれかに移動することに気付き，それぞれの遷移の確率を示して9点
- p_2, p_3を求めて6点(各3点)

(2)（配点10点）

- 点Pが頂点Cにある確率が$1-p_n$であることを述べて3点
- 漸化式の立式の説明と答えに7点

(3)（配点5点）

- 答えに5点

第2問（35点満点）

(1)（配点12点）

- Cの頂点Pの座標をa, bで表して4点
- PをD_1上の点としてtで表して4点
- 答えに4点

(2)（配点8点）

- Cの方程式をtで表し，面積S_1を求める定積分の式が立てられて2点
- 途中の計算と答えに6点

(3)（配点15点）

- Sをtで表して6点
- Sの増減を調べて6点
- Pの座標を求めて3点

第3問（35点満点）

(1)（配点10点）

- 背理法で証明する方針を立て，$\sqrt[3]{2}=\dfrac{q}{p}\left(\sqrt[3]{4}=\dfrac{q}{p}\right)$（$p$, qは互いに素な自然数)とおいて4点
- 証明できて6点

⑵（配点 10 点）

- $\log_2 a, \log_2 b, \log_2 c, \log_2 d$ から 3 個を取り出して和を考えた 4 つの数を A, B, C, D のように設定できて 3 点
- $\log_2 a, \log_2 b, \log_2 c, \log_2 d$ いずれかの小数部分を α などと設定して 3 点
- 証明できて 4 点

⑶（配点 15 点）

- $\log_2 a, \log_2 b, \log_2 c, \log_2 d$ の小数部分を α と設定し，3 個の数の和が整数になることから $\log_2$ ●の形の現れない関係式を導いて 4 点
- 上記の α に対し, $\alpha = 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$ が必要であることを導いて 6 点
- $\alpha = 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$ に対し，a(または b, c, d のいずれか)が有理数となるのは $\alpha = 0$ に限ることを述べて 3 点
- 証明できて 2 点

【理系】（250 点満点）

第 1 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $\angle \mathrm{PAQ} = \theta$ を導いて 10 点
- AP^2 を θ で表して 5 点
- 答えに 5 点

(2)（配点 30 点）

- S を θ で表して 6 点
- S を θ で微分して 6 点
- $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{dS}{d\theta} = 0$ となる θ を $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のように設定できて 6 点
- S の増減について述べ，最大値をもつことを示して 6 点
- 答えに 6 点

第 2 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}$ を導いて 7 点
- $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \cos(\pm\theta) + i\sin(\pm\theta)$(複号同順)を導いて 7 点
- 証明できて 6 点

(2)（配点 30 点）

- w を α, β, γ で表して 4 点
- $w \neq \alpha$, $w \neq \beta$, $w \neq \gamma$ を述べて 4 点
- 問題文の z の方程式を w の方程式に直し，さらに分母を払って 6 点
- w を消去し，α, β, γ の関係式を導いて 6 点
- 証明できて 10 点

第 3 問（50 点満点）

(1)（配点 10 点）

- $A_{n+1} - aA_n$ を a で表して 4 点
- $A_{n+1} - aA_n$ を因数 $a^2 + a + 1$ で括り出せて 4 点
- 残りの説明に 2 点

(2)（配点 12 点）

- $\{x_n\}$ の漸化式を導いて 3 点
- 数学的帰納法で証明する方針が立てられて 3 点
- 上記の方針の下，$n = 1$ のときを示せて 3 点
- $n = k$ の仮定の下，$n = k + 1$ での証明ができて 3 点

(3)（配点 12 点）

- 背理法で証明する方針の下，x_1, x_2 をそれぞれ $x_1 = pA$, $x_2 = pB$ (p は素数，A, B は整数)のように設定し，さらに $a = \dfrac{1}{2}(pA-1)$ を求めて 6 点
- x_1, x_2, a を消去し，p, A, B の間に成り立つ等式を導いて 3 点
- 証明できて 3 点

(4)（配点 16 点）

- 数学的帰納法で証明する方針が立てられて 2 点
- $n = k\ (\geqq 1)$ での成立の仮定の下，$n = k+1$ のときを証明するのに，背理法の仮定 $x_{k+1} = pA$, $x_{k+2} = pB$ (p は素数，A, B は整数)のように設定できて 4 点
- x_k が p の倍数となることを示して 8 点
- 証明できて 2 点

第 4 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- 全事象を把握し，状態の推移に関する場合の数(または確率)をそれぞれ求めて 10 点
- p_1 を求めて 4 点
- p_2 を求めて 6 点

(2)（配点 30 点）

- 途中に黒球 1 個，白球 2 個の状態がないときとあるときの 2 つの場合分けができて 4 点
- 途中に黒球 1 個，白球 2 個の状態がない場合の確率を求めて 4 点
- 途中に黒球 1 個，白球 2 個の状態がある場合，黒球が 2 個のままで推移する回数と黒球が 1 個のままで推移する回数を k, l などで設定できて 4 点
- 上記の k, l の範囲から黒球 1 個，白球 2 個の状態がある場合の確率を Σ で表せて 8 点
- 途中に黒球 1 個，白球 2 個の状態がある場合の確率を求めて 4 点
- $n = 1$ の場合の確認と答えに 6 点

第 5 問（50 点満点）

(1)（配点 20 点）

- $f'(x)$ を求め，$f(x)$ の概形が描けて 5 点
- V_1 を求める式が立てられて 5 点
- 途中の計算と答えに 10 点

(2)（配点 30 点）

- $V_2 - V_1$ において a を消去して t のみの形で表せて 10 点
- $V_2 - V_1$ を t の関数とみて，$0 < t < 1$ での増減を調べて 10 点
- 最大となる $V_2 - V_1$ の値，および a の値に 10 点(各 5 点)