第１回 ６月北大本番レベル模試　（2018 年 6 月 24 日実施）

採点基準　数学（文系・理系）

【共通事項】

1．約分の未了，根号内の整理不備は１点減点

2．分母の有理化の不備については減点なし

3．別解の配点は解答の配点に準ずる

【文系】（150 点満点）

第１問（40 点満点）

（1）（配点 8 点）

- 点 P のにおける接線の方程式を求めて 4 点
- 途中の計算と答えに 4 点

（2）（配点 12 点）

- $f(x)$の極値を与えるx座標を求めて 2 点
- 極大値と極小値が同符号であることを述べて 4 点
- 途中の計算と答えに 6 点

（3）（配点 20 点）

- 直線 PR の方程式を求めて 4 点
- Cと直線 PR の交点を求めて 4 点
- 囲まれる図形の概形を示して 2 点
- 面積を求める積分式を立式できて 4 点
- 途中の計算と答えに 6 点

第２問（35 点満点）

（1）（配点 17 点）

- $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1$，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ となることを述べて 5 点
- $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|^2$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$で表して 8 点
- 一定値をとることを示し，値を求めて 4 点

（2）（配点 18 点）

- $\triangle$ABC についての説明と，原点 O の位置について正しく述べて 3 点
- $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|^2$を$\vec{a}$，$\vec{p}$で表して 5 点
- $\vec{a}$と$\vec{p}$のなす角をθとして，$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|^2$を$\theta$で表して 2 点
- 最大値と最小値を求めて 8 点(各 4 点)

第 3 問（35 点満点）

（1）（配点 10 点）

- 2 回の取り出し方について場合分けをし，それぞれの確率を求めて 6 点
- 答えに 4 点

（2）（配点 12 点）

- 13 個の玉を並べると考え，取り出し方の総数を求めて 2 点
- n 回目が 3 個目の赤玉であったときの取り出し方を n で表して 6 点
- 答えに 4 点

（3）（配点 13 点）

- n 回目が 3 個目の赤玉であり，2 回目が赤玉であるときの取り出し方を求めて 4 点
- n 回目が 3 個目の赤玉であり，2 回目が赤玉であるときの確率を求めて 4 点
- 途中の計算と答えに 5 点

第 4 問（40 点満点）

（1）（配点 16 点）

- 分数式から式変形を行い，整数を考える式を導けて 4 点
- $\dfrac{33}{n+1}$ が自然数となる条件を考える方針を立てて 4 点
- 途中の計算と答えに 8 点

（2）（配点 24 点）

- 分数式から式変形を行い，整数を考える式を導けて 4 点
- $\dfrac{171n+138}{(n+1)(2n+1)}$ が自然数となる条件を考える方針を立てて 2 点
- (1)を利用し，n の値を絞り込んで 6 点
- 考え方と答えに 12 点

【理系】（150 点満点）

第 1 問（30 点満点）

（1）（配点 8 点）

- $f(x)=1+ax-(1+x)^a$ $(x\geqq 0)$ とおいたとき，$f'(x)\geqq 0$ となることを述べて 5 点
- 証明できて 3 点

（2）（配点 10 点）

- $g(x)=(1+x)^a-\left\{1+ax+\dfrac{1}{2}a(a-1)x^2\right\}$ $(x\geqq 0)$ とおいたとき，$g''(x)\geqq 0$ となることを述べて 5 点
- $g'(x)$ は単調増加であり，$g'(x)\geqq 0$ となることを述べて 3 点
- 証明できて 2 点

（3）（配点 12 点）

- (1)，(2)より不等式を整理し，$1+ax+\dfrac{1}{2}a(a-1)x^2\leqq(1+x)^a\leqq 1+ax$ となることを述べて 1 点
- $\sqrt[q]{\dfrac{n+p}{n}}=\left(1+\dfrac{p}{n}\right)^{\frac{1}{q}}$ から，$x=\dfrac{p}{n}, a=\dfrac{1}{q}$ とおき，$\sqrt[p]{\dfrac{n+q}{n}}=\left(1+\dfrac{q}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$ から，$x=\dfrac{q}{n}, a=\dfrac{1}{p}$ とおき，それぞれ，$1+ax+\dfrac{1}{2}a(a-1)x^2\leqq(1+x)^a\leqq 1+ax$ の不等式に適用して 4 点
- $n\left(\sqrt[q]{\dfrac{n+p}{n}}-\sqrt[p]{\dfrac{n+q}{n}}\right)$ を不等式で表し，整理して 4 点
- 答えに 3 点

第 2 問（30 点満点）

（1）（配点 18 点）

- P, Q の x 座標を p, q とおき，P, Q それぞれにおける接線の方程式を求め，R の座標を p, q で表して 8 点
- 点 A を通る直線 PQ の傾きを m とおき，直線 PQ の方程式を求め，$p+q$, pq を m, a, b で表し，R の座標を m, a, b で表して 6 点
- 考え方と答えに 4 点

（2）（配点 12 点）

- 直線 AS の傾きを求めて 3 点
- 直線 l と AS のなす角を tan の加法定理を利用して導いて 6 点
- 答えに 3 点

第 3 問（30 点満点）

（1）（配点 10 点）

- p_1 の答に 1 点
- r 回目に取り出した玉に書かれている数を x_r とする。$x_1 = k$ としたとき，$x_1 + x_2 \geqq n$ となる x_2 は $k+1$ (通り)あることを述べて 3 点
- $x_1 + x_2 \geqq n$ となる組合せを求めて 4 点
- 答えに 2 点

（2）（配点 12 点）

- $x_1 + x_2 = k$ としたとき，$x_1 + x_2 + x_3 \geqq n$ かつ $x_1 + x_2 \leqq n-1$ となる x_3 は $k+1$ (通り)あることを述べて 5 点
- x_1, x_2, x_3 の組合せを求めて 5 点
- 答えに 2 点

（3）（配点 8 点）

- $p_2 > \dfrac{1}{2}$ となることを導いて 6 点
- 証明できて 2 点

第 4 問（30 点満点）

（1）（配点 10 点）

- 係数を比較して α を求めて 5 点
- 数列 $\left\{z_n - 3\right\}$ の初項と公比を求めて 2 点
- 答えに 3 点

（2）（配点 10 点）

- $\left|z_n\right| \leqq |3| + \left|\left\{-\dfrac{\sqrt{5}}{2}(1+i)\right\}^n\right|$ と導いて 6 点
- 証明できて 4 点

（3）（配点 10 点）

- $\left|z_n\right| \geqq 35$ となる最小の自然数 n の見当をつけて 4 点
- $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)^n$ は単調に増加することを述べて 2 点
- 証明できて 4 点

第 5 問（30 点満点）

（1）（配点 6 点）

- $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ を因数分解して 4 点

- $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^{2n-k}b^k$ が整数となることを述べ，証明できて 2 点

(2)（配点 10 点）

- 与式を$(a+b)\left\{(a+b)^{2n}-\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^{2n-k}b^k\right\}$と$(a+b)$を因数に持つように整理して 2 点
- $(a+b)^{2n}-\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^{2n-k}b^k$ を$\sum$ で整理して 6 点
- $(a+b)^{2n}-\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a^{2n-k}b^k$ が ab の倍数であることを述べ証明できて 2 点

(3)（配点 14 点）

- $a=2$，$b=3$ として(2)に適用し，求める n は $5^{2n+1}-2^{2n+1}-3^{2n+1}$ が 9 の倍数となることが必要条件であることを述べて 3 点
- n を 3 で割った余りで場合分けする方針をたてて 2 点
- それぞれの場合で検討し，答えに 9 点