2008年度　第２回　京大本番レベル模試　**数　　学** (理系・乙)

3

採点欄

35

(1) $f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

$f''(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

$= \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}\left(\frac{1}{x} - 2\right)$

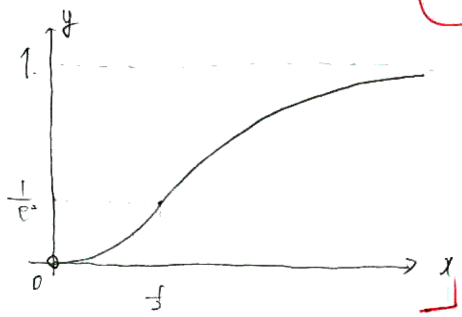
よって下表がかける

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$		$+$
$f''(x)$	/	$+$		$-$
$f(x)$	/	↗	$\frac{1}{e^2}$	↗

また $\lim_{x \to +0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$

15

よって下図がかける



(2) $y = e^{-\frac{1}{x}}$

$y = ax + \frac{1}{e^2} - \frac{a}{2}$

$\iff y - \frac{1}{e^2} = a\left(x - \frac{1}{2}\right)$

よって L_a は常に $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$

つまり $f(x)$の変曲点を通る

$y = f(x)$ の $x = \frac{1}{2}$ での傾きは

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{e^2}$ なので

L_a の条件は傾き a が

$0 < a < \frac{4}{e^2}$ …①

かつ

y切片 $\frac{1}{e^2} - \frac{a}{2}$ が

$\frac{1}{e^2} - \frac{a}{2} < 0$ …② であればよい

②より $\frac{1}{e^2} < \frac{a}{2} \iff \frac{2}{e^2} < a$

①より aの範囲は

$\frac{2}{e^2} < a < \frac{4}{e^2}$

20