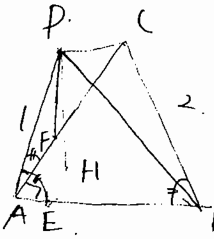
4

採点欄

30



$AC=2\sin\alpha,\ AB=2\cos\alpha$ より，

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cdot 2\cos\alpha$

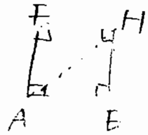
$=2\sin\alpha\cos\alpha$ …①

次に，Dから△ABCに下ろした垂線の足をH

DからABに下ろした垂線の足をE，

ACに下ろした垂線の足をF　とおくと

三垂線の定理より，$\begin{cases} HE\perp AB \\ HF\perp AC \end{cases}$ が成り立つ．



$AE=\cos\alpha,\ AF=\cos\alpha$ より，四角形FAEHは一辺の長さが $\cos\alpha$ の正方形である．

したがって，$AH=\sqrt{2}\cos\alpha$．

△AHDにおいて三平方の定理より，$DH=\sqrt{1-2\cos^2\alpha}$ …②

①，②より，体積Vは，

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-2\cos^2\alpha}$$ と表せる．

$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-2\cos^2\alpha}$ の最大値を考える．

$\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-2\cos^2\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1-2\cos^2\alpha)}$　（∵ $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より，$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha>0$）

$=\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(\cos^2\alpha-2\cos^4\alpha)}$

$=\sqrt{2\cos^6\alpha-3\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}$

ここで $\cos^2\alpha=t$ $(0<t<\frac{1}{2})$ とおき，$f(t)=2t^3-3t^2+t$ の最大値を考える．

$f'(t)=6t^2-6t+1$

増減表

t	0		$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$		$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗		↘	

左表より，

$\max f(t)=f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{18}$

したがって

$$\max V=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{18}}=\frac{\sqrt{2}}{9}\cdot\sqrt[4]{3}$$