2006年度　第2回　京大本番レベル模試　**数　学** (文系)

4

採点欄 30

$x-a \geqq 0$ つまり $x \geqq a$ のとき

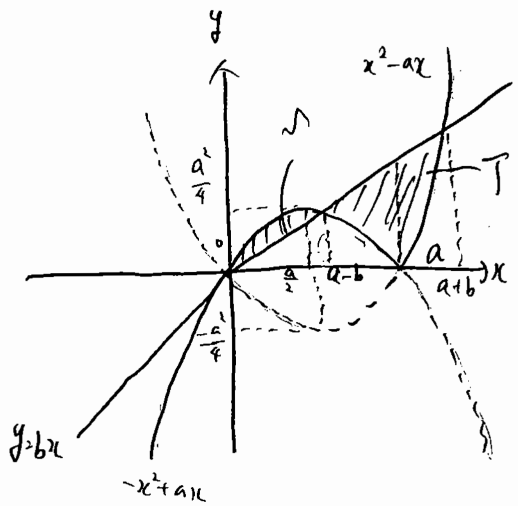
$y = x|x-a|$

$\Leftrightarrow y = x^2 - ax$ となり

$x - a < 0$ つまり $x < a$ のとき

$y = x|x-a|$

$\Leftrightarrow y = -x^2 + ax$ となる.



又、$y=x|x-a|$ の $x=0$ における接線の傾きが a である.

よって、上図のようなグラフを書ける.

$$S = \int_0^{a-b} \{(-x^2+ax) - bx\} dx$$

$$= \frac{1}{6}(a-b)^3$$

$$T = \int_{a-b}^{a} \{bx - (-x^2+ax)\} dx + \int_a^{a+b} \{bx - (x^2-ax)\} dx$$

$$= \left(\frac{ab^2}{2} - \frac{b^3}{6}\right) + \left(\frac{ab^2}{2} + \frac{b^3}{6}\right)$$

$$= ab^2$$

よって、$S+T = \frac{1}{6}(a^3 - 3a^2b + 9ab^2 - b^3)$

$$= -\frac{1}{6}b^3 + \frac{3}{2}ab^2 - \frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{6}a^3 \quad (= f(b) とおく)$$

$$f'(b) = -\frac{1}{2}b^2 + 3ab - \frac{1}{2}a^2$$

b		$(3-2\sqrt{2})a$		$(3+2\sqrt{2})a$	
$f'(b)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(b)$	↘		↗		↘

一 計　算　用 一

よって、$b_0 = (3-2\sqrt{2})a$ のとき $S+T$ は最小値をとるので.

$$\frac{b_0}{a} = \frac{(3-2\sqrt{2})a}{a}$$

$$= 3-2\sqrt{2}.$$

よって、題意は示された.