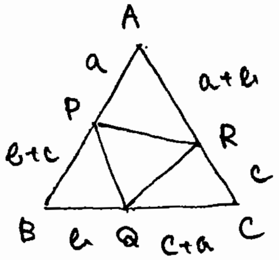
2006年度　第１回　京大本番レベル模試　**数　学**（理系）

1

採点欄 35



下図のように、AP $=a$, BQ $=b$, CR $=c$ とおくと

$a+b+c=l=$ AB $=$ BC $=$ CA だから

BP $=b+c$, CQ $=c+a$, AR $=a+b$

となる。よって

$$\triangle APR=\frac{1}{2}a\cdot(a+b)\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a(a+b)$$ (+1)

同様に $\triangle BQP=\frac{\sqrt{3}}{4}b(b+c)$, $\triangle CRQ=\frac{\sqrt{3}}{4}c(c+a)$ (+3)

$\triangle APR+\triangle BQP+\triangle CRQ=S$ とおくと、$\triangle PQR=\triangle ABC-S$ だから。

S をまずもとめると、

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\{a(a+b)+b(b+c)+c(c+a)\}$$ より

$$\frac{4}{\sqrt{3}}S=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)$$

$$=l^2-(ab+bc+ca)$$

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}l^2-\frac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ca)=\triangle ABC-\frac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ca)$$ (+2)

$$\therefore\ \triangle PQR=\frac{\sqrt{3}}{4}(ab+bc+ca)\ \text{—①}$$ (+4)

①で、$c=l-(a+b)$ を用いて

$$L=ab+bc+ca=-a^2+(l-b)a+lb-b^2$$ (+2)

$$=-\left(a-\frac{l-b}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\left(b-\frac{l}{3}\right)^2+\frac{l^2}{3}\ \text{—②}$$ (+6)

②より L の最大値は $b=\frac{l}{3}$ (+1), $a=\frac{l-b}{2}=\frac{l}{3}$ (+1) のとき $\frac{l^2}{3}$ (+3)

よって $\triangle PQR=\frac{\sqrt{3}}{4}L$ の最大値は $\frac{\sqrt{3}}{12}l^2$ (+4)

($a=b=c=\frac{l}{3}$ のとき) (+3)