2

採点欄

30

3つの解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とおく（(ii)より $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$）

求める3次方程式は

$k(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)=0$

とおける（kは任意）

x^3の係数は1　より $k=1$

また係数は実数なので

$-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$，$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1$，$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

は全て実数

a）$\alpha_1 \sim \alpha_3$ の中に実数でない数があるとき

α_1 は実数とする ~~数係数~~ なので α_2, α_3 は共役

a, bは実数とする

$\alpha_2 = a+bi$ とおくと　$\alpha_3 = a-bi$（$b>0$とする）

$a \neq 0$ のとき

$\alpha_2^2 = a^2-b^2+2abi = a-bi$　（(i)より。また α_1は実数より）

$\alpha_3^2 = a^2-b^2-2abi = a+bi$　（またa, bは実数より）

$a^2-a-b^2+b(2a+1)i=0$

$a^2-b^2-a-b(2a+1)i=0$

$b \neq 0$ より　$a=-\frac{1}{2}$，$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$

このとき　$\alpha_1^2=\alpha_1$ であるので

$\alpha_1 = 0, 1$

したがって

$x(x^2+x+1)=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

これは(ii)も満たす

b）$\alpha_1 \sim \alpha_3$ が全て実数のとき

$\alpha_1^2=\alpha_2$　$|\alpha_2| \neq |\alpha_1|$ とすると

$\alpha_2^2 \neq \alpha_1$ なので $\alpha_2^2=\alpha_3$　このとき $|\alpha_3| \neq |\alpha_2|$，$|\alpha_3| \neq |\alpha_1|$

$\alpha_3^2 \neq \alpha_1$，$\alpha_3^2 \neq \alpha_2$ となり不適

よって

$|\alpha_1|^2=|\alpha_1|$

$|\alpha_1|=0, 1$　（これはα_2, α_3も同様）

また(i)より

$\alpha=-1$ が含まれるとき

$\alpha=1$ も含まれねばならない

よって

条件を満たす三次式は

$x^3=0$

$x^2(x-1)=0$

$x(x-1)^2=0$

$x(x-1)(x+1)=0$

$(x-1)^3=0$

$(x-1)^2(x+1)=0$

$(x-1)(x+1)^2=0$

このうち(ii)を満たすものは

$x(x-1)(x+1)$

a）b）より

求める3次式は

$x(x^2+x+1)=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x(x-1)(x+1)=0$