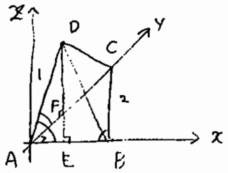
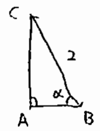
2006年度　第1回　京大本番レベル模試　数　学（理系）

4

採点欄
30



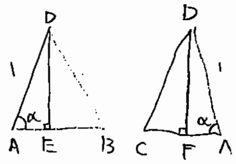
左のように座標軸をとる．A：原点



$AC = 2\sin\alpha$, $AB = 2\cos\alpha$ である． 4

また、右図より

DからAB, ACに引いた垂線とAB, ACとの交点をE, Fとしたとき、$EA = FA = \cos\alpha$ 4

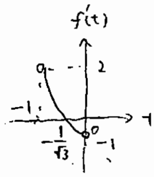


よって D $(\cos\alpha, \cos\alpha, z)$ とおける．AD=1より $1^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha + z^2$

$1 - 2\cos^2\alpha = z^2$, $z = \sqrt{-\cos 2\alpha}$ (z>0より) 4 よって四面体ABCDの体積(=V)は $\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot z \cdot \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}\sin 2\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$ と表せる． 6 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$, $2\alpha = \beta$ とおき、

$V^2 = -\frac{1}{9}\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha = \frac{1}{9}(\cos^2\beta - 1)\cos\beta$, $\cos\beta = t$ とおけば $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ より $-1 < t < 0$



$V^2 = \frac{1}{9}(t^2 - 1)t$ 4 ここで、$f(t) = (t^2 - 1)t = t^3 - t$ とおくと、

$f'(t) = 3t^2 - 1$, $f'(t) = 0$ のとき $t^2 = \frac{1}{3}$, $-1 < t < 0$ より $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

右のグラフよりこのとき $f(t)$ は最大 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 6

$V^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $V > 0$ より $V = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{9}$ よって Vの最大値は $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{9}$ //

2