第１回　東大本番レベル模試 採点基準

（平成 18 年 6 月 4 日実施）

数学(理科)

第１問

【問題】

４つの複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 に対し,

$$w_k=z_1{}^k+z_2{}^k+z_3{}^k+z_4{}^k \quad (k=1,\ 2,\ 3)$$

とおく.

(1)　$p=z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4$ を, w_1, w_2 を用いて表せ.

(2)　$w_1=w_2=w_3=0$ のとき，等式

$$z_1{}^4=z_2{}^4=z_3{}^4=z_4{}^4$$

が成り立つことを示せ.

【配点】　計20点

【解答】

(1)

$$\begin{aligned} w_1{}^2-w_2&=(z_1+z_2+z_3+z_4)^2-(z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2+z_4{}^2)\\ &=2(z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4)\\ &=2p \end{aligned}$$

$$\therefore\quad p=\frac{1}{2}(w_1{}^2-w_2) \qquad \cdots\cdots①(答)$$

(2)　$w_1{}^3=(z_1+z_2+z_3+z_4)^3$

を展開すると,

1°　$z_1{}^3$, $z_2{}^3$, $z_3{}^3$, $z_4{}^3$ の係数は１.

2°　$z_1{}^2z_2$ の係数を考える.

$$(\boxed{z_1}+z_2+z_3+z_4)(\boxed{z_1}+z_2+z_3+z_4)(z_1+\boxed{z_2}+z_3+z_4)$$

$$z_1{}^2z_2$$

z_1 を２個, z_2 を１個選ぶ方法が３通りあるから, $z_1{}^2z_2$ の係数は３である.

同様にして, $z_a{}^2z_b$ $(a\neq b)$ の形の項の係数はすべて３である.

3°　$z_1z_2z_3$ の係数を考える.

$$(\boxed{z_1}+z_2+z_3+z_4)(z_1+\boxed{z_2}+z_3+z_4)(z_1+z_2+\boxed{z_3}+z_4)$$

$$z_1z_2z_3$$

z_1, z_2, z_3 の選び方は $3!=6$ (通り)あるから, $z_1z_2z_3$ の係数は６である.

同様にして, $z_az_bz_c$ (a, b, c は異なる) の形の項の係数は，すべて６である.

よって,

$$\begin{aligned} w_1{}^3=w_3&+3(z_1{}^2z_2+z_1{}^2z_3+z_1{}^2z_4+\cdots\cdots+z_4{}^2z_3)\\ &+6(z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4) \quad\cdots\cdots② \end{aligned}$$

次に，②の右辺において，第２項の (　　) の中

を q とおく.

$$q=z_1{}^2z_2+z_1{}^2z_3+z_1{}^2z_4+\cdots\cdots+z_4{}^2z_3$$

これを,

$$w_1w_2=(z_1+z_2+z_3+z_4)(z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2+z_4{}^2)$$

と比較すると,

$$w_1w_2=w_3+q$$

$$\therefore\quad q=w_1w_2-w_3$$

を得る.

したがって，②より

(1)　結果 $p=\frac{1}{2}(w_1{}^2-w_2)$ ---- 5点

(2)　②式 --- 3点

$q=w_1w_2-w_3$ --- 3点

$z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+\cdots+z_2z_3z_4=0$ --- 3点

z_1,z_2,z_3,z_4 を４根とする方程式 $x^4+z_1z_2z_3z_4=0$

--- 3点

結論 --- 3点

第１回　東大本番レベル模試　採点基準

（平成 18 年 6 月 4 日実施）

数学（理科）

$$w_1{}^3 = w_3 + 3(w_1w_2 - w_3) + 6(z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4)$$

$$\therefore\ z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 = \frac{1}{6}\{w_1{}^3 - w_3 - 3(w_1w_2 - w_3)\} = \frac{1}{6}(w_1{}^3 - 3w_1w_2 + 2w_3) \quad \cdots\cdots③$$

すると，$w_1 = w_2 = w_3 = 0$ の下で，①，③より

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 = 0 \\ z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 = 0 \end{cases}$$

が得られる．よって，z_1，z_2，z_3，z_4 を 4 つの解とする 4 次方程式は

$$(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4) = 0$$

$$\therefore\ x^4 - (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)x^3 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4)x^2 - (z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4)x + z_1z_2z_3z_4 = 0$$

$$\therefore\ x^4 + z_1z_2z_3z_4 = 0$$

となる．

したがって，

$$z_1{}^4 = z_2{}^4 = z_3{}^4 = z_4{}^4 \quad (= -z_1z_2z_3z_4)$$

が成り立つ．∎

（注）(2)において，与えられた条件から，

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -z_4 & \cdots\cdots④ \\ z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 = -z_4{}^2 & \cdots\cdots⑤ \\ z_1{}^3 + z_2{}^3 + z_3{}^3 = -z_4{}^3 & \cdots\cdots⑥ \end{cases}$$

④^2−⑤を作ると，

$$2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = 2z_4{}^2$$

$$\therefore\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_4{}^2 \quad \cdots\cdots⑦$$

また，

$$z_1{}^3 + z_2{}^3 + z_3{}^3 - 3z_1z_2z_3 = (z_1 + z_2 + z_3)(z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1)$$

において，⑤，⑦より

$$z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1 = -z_4{}^2 - z_4{}^2 = -2z_4{}^2$$

であるから，

$$z_1{}^3 + z_2{}^3 + z_3{}^3 - 3z_1z_2z_3 = 2z_4{}^3$$

$$\therefore\ z_1z_2z_3 = \frac{1}{3}(z_1{}^3 + z_2{}^3 + z_3{}^3 - 2z_4{}^3)$$

$$\therefore\ z_1z_2z_3 = -z_4{}^3 \quad \cdots\cdots⑧$$

④，⑦，⑧より，z_1，z_2，z_3 は，３次方程式

$$x^3 + z_4x^2 + z_4{}^2x + z_4{}^3 = 0$$

の解である．

この両辺に $(x - z_4)$ をかけると，

$$(x - z_4)(x^3 + z_4x^2 + z_4{}^2x + z_4{}^3) = 0$$

$$\therefore\ x^4 - z_4{}^4 = 0$$

$$\therefore\ x^4 = z_4{}^4$$

となるから，

$$z_1{}^4 = z_2{}^4 = z_3{}^4 = z_4{}^4$$

が成り立つ．

あるいは，⑧の両辺に $-z_4$ をかけて，

$$z_4{}^4 = -z_1z_2z_3z_4$$

同様に，

$$z_1{}^4 = z_2{}^4 = z_3{}^4 = -z_1z_2z_3z_4$$

$$\therefore\ z_1{}^4 = z_2{}^4 = z_3{}^4 = z_4{}^4$$

(2) 別解の場合．

⑦式　　--- 3点

⑧式　　--- 3点

3次方程式 $x^3 + z_4x^2 + z_4{}^2x + z_4{}^3 = 0$　　--- 3点

$x^4 = z_4{}^4$　　--- 3点

結論　　--- 3点

(2) 別解の別解

⑧から直接 $z_1{}^4 = -z_1z_2z_3z_4$ とする　　--- 6点

結論　　--- 3点

第１回　東大本番レベル模試　$\boxed{\text{採点基準}}$

（平成 18 年 6 月 4 日実施）

数学（文科）

第１問

【問題】

３つの複素数 z_1, z_2, z_3 が

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2=0 \end{cases}$$

を満たすとき，

$$z_1{}^3=z_2{}^3=z_3{}^3$$

が成り立つことを示せ．

【配点】　計20点

【解答】

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 & \cdots\cdots① \\ z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①^2−②を作ると

$$(z_1+z_2+z_3)^2-(z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2)=0$$

$$\therefore\quad z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0 \qquad\cdots\cdots③$$

そこで，

$$a=z_1z_2z_3 \qquad\cdots\cdots④$$

とおく．①，③，④を３次方程式の解と係数の関係と見ると，z_1，z_2，z_3 は，

$$x^3-a=0$$

の解であることが分かる．

よって，

$$z_1{}^3=z_2{}^3=z_3{}^3\quad(=a)$$

が成り立つ．■

【別解】

$$z_1+z_2+z_3=0$$

より，

$$z_3=-(z_1+z_2)$$

これを

$$z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2=0$$

に代入すると，

$$z_1{}^2+z_2{}^2+(z_1+z_2)^2=0$$

$$\therefore\quad z_1{}^2+z_1z_2+z_2{}^2=0$$

この両辺に (z_1-z_2) をかければ，

$$(z_1-z_2)(z_1{}^2+z_1z_2+z_2{}^2)=0$$

$$\therefore\quad z_1{}^3-z_2{}^3=0$$

$$\therefore\quad z_1{}^3=z_2{}^3$$

同様に，

$$z_2{}^3=z_3{}^3$$

を得ることができる．

①^2−② を作る方針　--- 5点

③式　--- 5点

3次方程式　$x^3-z_1z_2z_3=0$　--- 5点

結論　--- 5点

別解の場合

z_3 を消す方針　--- 5点

$z_1{}^2+z_1z_2+z_2{}^2=0$　--- 5点

$z_1{}^3=z_2{}^3$　--- 5点

結論　--- 5点