第１回　東大本番レベル模試　採点基準

（平成 18 年 6 月 4 日実施）

数学（理科）　数学（文科）

第２問

【問題】

$BC=4$, $CA=5$, $AB=6$ である三角形 ABC を考える．

(1) $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ の値を求めよ．

(2) 三角形 ABC の外心を O とするとき，

$$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$
$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)\neq(0,\ 0,\ 0)$$

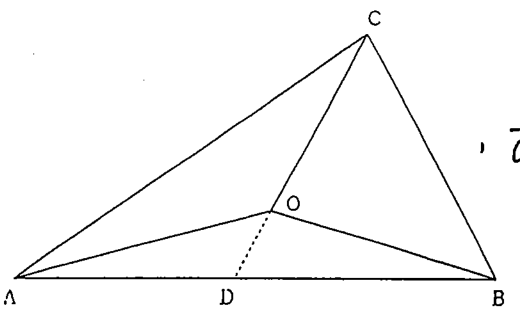
が成立するような定数 α, β, γ の比 $\alpha:\beta:\gamma$ を求めよ．

【配点】　計20点

【解答】

(1)
$$\begin{cases}\cos A=\dfrac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\dfrac{3}{4} & \text{┘ }\cancel{2}\ 1\\ \cos B=\dfrac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\dfrac{9}{16} & \text{┘ }\cancel{2}\ 1\\ \cos C=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{1}{8} & \text{┘ }\cancel{2}\ 1\end{cases}$$
……(答)

(2) $\cos A$, $\cos B$, $\cos C>0$ であるから，$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり，外心 O は $\triangle ABC$ の内部にある．



関係式

$$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}\quad\text{……①}$$

において，もしも $\gamma=0$ とすると

$$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=\vec{0}$$

となるが，OAB は三角形をなすから，$\alpha=\beta=0$ となり，α, β, γ の条件に反する．したがって $\gamma\neq0$ でなければならない．このとき①より

$$\overrightarrow{OC}=-\frac{1}{\gamma}(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB})$$ ┘1

となる．

CO の延長と AB の交点を D とし，　┘2

$AD:DB=s:t$ とおくと，

$$\overrightarrow{OD}=\frac{t\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}}{s+t}$$

$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OD}$ は平行であるから，

$$-\frac{1}{\gamma}(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB})\,/\!/\,\frac{1}{s+t}(t\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB})$$

$$\therefore\ \alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\,/\!/\,t\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore\ \alpha:\beta=t:s$$

$$\therefore\ AD:DB=\beta:\alpha$$ ┘2

すると，三角形の面積比は，

$$\begin{cases}\triangle ADO:\triangle BDO=\beta:\alpha\\ \triangle ADC:\triangle BDC=\beta:\alpha\end{cases}$$

$$\therefore\ \triangle AOC:\triangle BOC=\beta:\alpha$$ ┘2

となる．

(1) $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ 各~~2~~1点 --- ~~6~~3点

(2) $AD:DB=\beta:\alpha$ --- 2点

OC の式 --- 1点

$\triangle AOC:\triangle BOC=\beta:\alpha$ --- 2点

$\triangle BOC:\triangle COA:\triangle AOB=\alpha:\beta:\gamma$ --- 2点

COとABの交点Dを仲介させる方針 --- 2点

$\alpha:\beta:\gamma=\sin\angle BOC:\sin\angle COA:\sin\angle AOB$ --- 2点

$\alpha:\beta:\gamma=\sin A\cos A:\sin B\cos B:\sin C\cos C$ --- 2点

$\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6$ --- 2点

$\alpha:\beta:\gamma=16:15:4$ --- 2点

(2) 別解の場合

・$\vec{a}$, $\vec{b}$ の関係 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{5}{2}$ --- 2点

$\begin{cases}|\vec{a}|^2=25\\ |\vec{b}|^2=16\\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=36\end{cases}$ --- 1点

u, v の満たす方程式 --- 2点

$u=\dfrac{16}{35}$, $v=\dfrac{3}{7}$ --- 2点

・「Oが外心」という条件から導かれる式

$\begin{cases}\vec{p}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2\\ \vec{p}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{b}|^2\end{cases}$ --- 2点

$\overrightarrow{OA}=\dfrac{19}{35}\vec{a}-\dfrac{3}{7}\vec{b}$ --- 2点

$\overrightarrow{OB}=-\dfrac{16}{35}\vec{a}+\dfrac{4}{7}\vec{b}$ --- 2点

$\overrightarrow{OC}=-\dfrac{16}{35}\vec{a}-\dfrac{3}{7}\vec{b}$ --- 2点

$\alpha:\beta:\gamma=16:15:4$ --- 2点