第１回　東大本番レベル模試　採点基準

（平成 18 年 6 月 4 日実施）

数学（理科）　数学（文科）

第 4 問

【問題】

正四面体 OABC が，面 ABC を下にして，水平な面 P の上に置かれている．この正四面体を次のように動かす．

P に接していない面のどれかを無作為に選んで，その面 S と水平面 P が共有する線分を軸として，S が P に接する位置まで回転する．

これを繰り返して，面 ABC が P に接する位置に来たら止める．

(1) 平面 P 上で，四面体が最初に接していた位置を α，最後に接する位置を β とする．

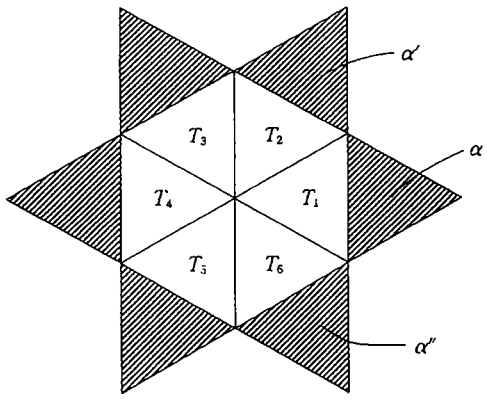
正三角形 α, β が一致する確率を a, α と β が頂点を一つだけ共有する確率を b として，a を b を用いて表せ．

(2) (1)の a の値を求めよ．

【配点】 計20点

【解答】

(1)



図の α の位置にあった，正四面体 OABC は，まず T_1 の上に移動し，ついで，正三角形 T_1, T_2, ……, T_6 の上を隣から隣へとランダムに動き，斜線を引いたどれかの正三角形の上で止まるとしてよい．

このとき，確率 a, b は

a=「T_1 から出発して，α で止まる確率」

b=「T_1 から出発して，α' または α'' で止まる確率」

と表され，さらに

b'=「T_1 から出発して，α' で止まる確率」

b''=「T_1 から出発して，α'' で止まる確率」

とおくと，

$$\begin{cases} b'=b'' \\ b'+b''=b \end{cases}$$

$$\therefore\quad b'=b''=\frac{1}{2}b$$

が成立する．

さて，T_1 から出発すると，最初の行き先は，α, T_2, T_6 のどれかであり，それぞれ確率 $\frac{1}{3}$ で選ばれる．そして，最初の行き先が T_2 だとすれば，T_2 を新たな出発点として α で止まる確率は b' $(=b'')$ である．また，最初の行き先が T_6 だとしても，同様である．よって，

$$a=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}b'+\frac{1}{3}b'$$

$$\therefore\quad a=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}b' \qquad \cdots\cdots①$$

(1)　「対称性」に気が付いて　--- 3点

「T_2 を新たな出発点として，α で止まる確率は b' である」の考え方　--- 3点

$a=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}b$　--- 2点

(2)　②，③，④　各3点　--- 9点

$a=\frac{9}{20}$　--- 3点