第１回　東大本番レベル模試　採点基準

（平成 18 年 6 月 4 日実施）

数学（理科）

第６問

【問題】

底面の半径が r，深さが a の円柱形の容器（円柱の側面と下底面からなる図形）を，下底面を水平にして，深さ h まで水を入れる．この容器を傾けて，水面が下底面の中心を通るようにする．

(1)　このようにしても水がこぼれないための a，h の条件を求めよ．

(2)　(1)の条件の下で，水と接している円柱の側面の部分の面積を h，r を用いて表せ．

【配点】　計20点

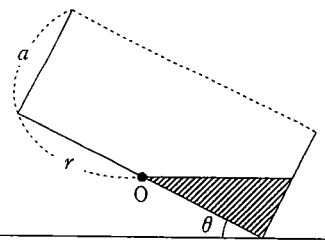
【解答】

(1)　水の体積は

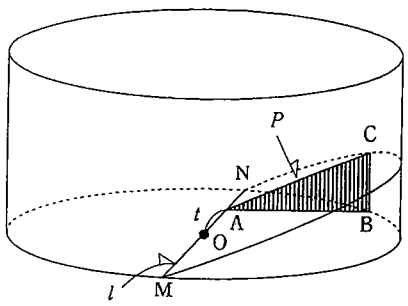
$$V=\pi r^2 h \qquad \cdots\cdots①$$

である．

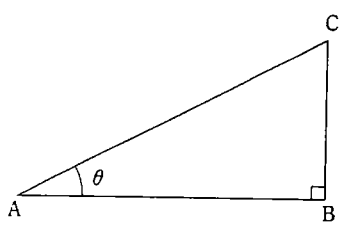
容器を角 θ だけ傾けたとき，水面が底面の中心 O を通るとする．



水の形を保って，容器を水平に戻し，水面と底面の交線 l に垂直な平面 P による水の断面を考える．底面の中心 O から P までの距離を t $(0\leqq t\leqq r)$ とする．



この図において断面は $\angle\mathrm{CAB}=\theta$，$\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$ の三角形 ABC となり，



$$\mathrm{AB}=\sqrt{r^2-t^2}$$

である．

よって，断面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{AB}^2\tan\theta$$

$$=\frac{1}{2}(r^2-t^2)\tan\theta$$

となる．

したがって，対称性を考慮すれば，

(1)　① 式　…　2点

$S(t)=\frac{1}{2}(r^2-t^2)\tan\theta$　…　2点

$V=\frac{2}{3}r^3\tan\theta$　…　2点

$\tan\theta=\frac{3\pi}{2}\frac{h}{r}$　…　2点

$\frac{3\pi}{2}h\leqq a$　…　2点

(2)　円弧の長さ（$NB=x=r\varphi$）などを考える　…　2点

BC を x などで表す　…　2点

展開図を考える方針　…　2点

面積を積分で表す　…　2点

結論　$3\pi hr$　…　2点