第 1 問

1 点数	20

(1) $w_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$

$w_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$

$w_1^2 = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)^2 = w_2 + 2p$

$\therefore\ p = \dfrac{w_1^2 - w_2}{2}$ //

(2) $w_3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3$

$w_1^3 = w_3 + 3(z_1^2 z_2 + z_1^2 z_3 + z_1^2 z_4 + z_2^2 z_1 + z_2^2 z_3 + z_2^2 z_4 + z_3^2 z_1 + z_3^2 z_2 + z_3^2 z_4 + z_4^2 z_1 + z_4^2 z_2 + z_4^2 z_3)$

$+ 6(z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4)$ → 3

$= w_3 + 3(w_2 \cdot w_1 - w_3) + 6q$ → 3

($q = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4$ とおいた。)

$\therefore\ w_1^3 = 3w_1 \cdot w_2 - 2w_3 + 6q$

$w_1 = w_2 = w_3 = 0$ より

$q = 0$

また $p = \dfrac{w_1^2 - w_2}{2} = 0$ ($\because$ (1), $w_1 = w_2 = 0$)

$w_1 = 0$ → 3

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = r$ とおけば

z_1, z_2, z_3, z_4 は x についての

4次方程式

$f(x) = x^4 - w_1 x^3 + p x^2 - q x + r = 0$ → 3

の4解である。

ここで $w_1 = p = q = 0$ より

$f(x) = x^4 + r$ となる。

z_1 は $f(x) = 0$ の解の一つだから

$z_1^4 = -r$ 同様に $z_2^4 = z_3^4 = z_4^4 = -r$ → 3

従って $z_1^4 = z_2^4 = z_3^4 = z_4^4$

であり、題意は示された。