2 点数	20

第 2 問

(1) $\cos A = \dfrac{36+25-16}{2\cdot 5\cdot 6} = \dfrac{3}{4}$

$\cos B = \dfrac{36+16-25}{2\cdot 6\cdot 4} = \dfrac{9}{16}$

$\cos C = \dfrac{16+25-36}{2\cdot 4\cdot 5} = \dfrac{1}{8}$

(2) 与式を Aを支点として書き換えると

$-\alpha\overrightarrow{AO} + \beta(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) + \gamma(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AO}) = \vec{0}$

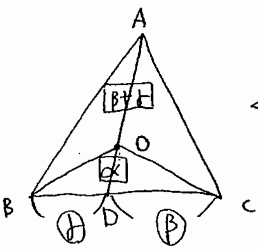
$\therefore \overrightarrow{AO} = \dfrac{\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}}{\alpha+\beta+\gamma}$

$= \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} \cdot \dfrac{\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}}{\beta+\gamma}$

辺BCを $\gamma:\beta$ に内分する点を D とおくと

$\therefore \overrightarrow{AO} = \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AD}$

よって $AO : OD = \beta+\gamma : \alpha$



よって 面積比は

$\triangle AOB : \triangle AOC = \gamma : \beta$ ....①

また $\triangle AOB + \triangle AOC : \triangle BOC = \beta+\gamma : \alpha$ ...②

①, ② より

$\triangle BOC : \triangle AOC : \triangle AOB = \alpha : \beta : \gamma$

Oは△ABCの外心より

$OA = OB = OC$ ... ③

よって $\alpha : \beta : \gamma = \triangle BOC : \triangle AOC : \triangle AOB$

$= \sin\angle BOC : \sin\angle AOC : \sin\angle AOB$ (∵③)

$= \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$

$= 2\sin A\cos A : 2\sin B\cos B : 2\sin\cos C$ ....④

また 正弦定理より

$\sin\angle A : \sin\angle B : \sin\angle C$

$= 4 : 5 : 6$

これと (1) の結果を ④ に代入すると

$\alpha : \beta : \gamma = 4\cdot\dfrac{3}{4} : 5\cdot\dfrac{9}{16} : 6\cdot\dfrac{1}{8}$

$= 3\cdot 16 : 5\cdot 9 : 12$

$= 16 : 15 : 4$ //