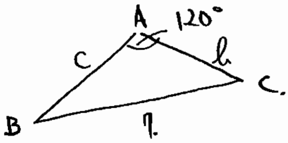
2 点数	20

第 2 問

△ABCについて

i). Aに対応する辺 BC=7のとき



余弦定理より

$$\cos 120^\circ = \frac{b^2+c^2-49}{2bc}$$

$$\iff b^2+c^2+bc=49 \quad \cdots ①$$

ここで $b \leqq c$ としても一般性を失わない。 $c<7$を考えて

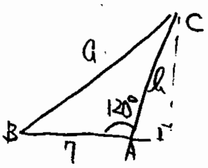
$b \leqq c \leqq 6$で考える。 $c=6$のとき ①より $b^2+6b-13=0$. これをみたす $b\in\mathbb{Z}$は存在

$c=5$のとき ①より $b^2+5b-24=0 \iff b=3\ (>0)$ これは $b \leqq c$をみたす。

$c \leqq 4$のとき $b^2+c^2+bc \leqq 48$より これは ①に反する。

以上より $(b,c)=(3,5)$

ii). ABもしくはACが7のとき



余弦定理より

$$\cos 120^\circ = \frac{49+b^2-a^2}{14\cdot b}$$

$$\iff b^2+7b+49-a^2=0 \quad \cdots ②$$

$b\in\mathbb{Z}$ となるとき ②の判別式 $D=n^2$ が必要で $(n\in\mathbb{Z}, n\geqq 0)$

$$D = 4a^2-147=n^2$$

$$\iff (2a+n)(2a-n)=147 \quad \cdots ②$$

$n\in\mathbb{Z}$より $2a+n$, $2a-n$ は偶奇が一致するので $2a+n>0$, $2a+n \geqq 2a-n$ を考えて

$(2a+n, 2a-n)=(147,1),(49,3),(21,7)$

より $a=37, 13, 7$

が必要 これらを②に代入して $b\in\mathbb{N}$をみたすのは

$(a,b)=(13,8),(37,33)$

以上より

2辺の長さは 3,5 または 8,13, または 33,37 //