2	
点数	20.

第 2 問

(1)

(※)をみたす ある奇数 に関して、

その末尾に 2, 4, 6, 8 のいずれかの数を加える

ことで (※)をみたす 1桁大きい数がつくれる。

例えば 21685 に対して

$$\begin{cases} 216852 \\ 216854 \\ 216856 \\ 216858 \end{cases}$$ はいずれも(※)をみたす。

一方、(※)をみたす ある偶数 に対して

その末尾に 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 のいずれかの

数を加えると (※)をみたす 1桁大きい数が

つくれる。

よって、この末尾が奇数なら その数は奇数、

偶数なら その数は偶数と

なるので、

$x_{n+1} = 5y_n$

$y_{n+1} = \cancel{4x_n + 4y_n}$ である。

(2) $x_n = 5y_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ より、

$y_{n+1} = 4 \cdot 5y_{n-1} + 4y_n$

$y_{n+1} = 4y_n + 20y_{n-1}$

$y_{n+2} = 4y_{n+1} + 20y_n$ $(n \geqq 1)$

$y_{n+2} - (2+2\sqrt{6})y_{n+1} = (2-2\sqrt{6})\{y_{n+1} - (2+2\sqrt{6})y_n\}$

$y_2 = 36$ (1の位の 2, 4, 6, 8 に対し 10の位が 1〜9のいずれか)

$x_2 = 20$ (1の位の 1, 3, 5, 7, 9 に対し 10の位は 2, 4, 6, 8 のいずれか)

$\therefore$ $y_3 = 224$

$\therefore$ $y_{n+1} - (2+2\sqrt{6})y_n = (152 - 72\sqrt{6})(2-2\sqrt{6})^{n-2}$ …①

$(n \geqq 2)$

また、

$y_{n+2} - (2-2\sqrt{6})y_{n+1} = (2+2\sqrt{6})\{y_{n+1} - (2-2\sqrt{6})y_n\}$

$y_{n+1} - (2-2\sqrt{6})y_n = (152+72\sqrt{6})(2+2\sqrt{6})^{n-2}$

$(n \geqq 2)$ …②

① − ② より、

$-(2+2\sqrt{6})y_n + (2-2\sqrt{6})y_n$

$= (152 - 72\sqrt{6})(2-2\sqrt{6})^{n-2}$

$- (152+72\sqrt{6})(2+2\sqrt{6})^{n-2}$

$-4\sqrt{6}\,y_n = 152\{(2-2\sqrt{6})^{n-2} - (2+2\sqrt{6})^{n-2}\}$

$- 72\sqrt{6}\{(2-2\sqrt{6})^{n-2} + (2+2\sqrt{6})^{n-2}\}$

$y_n = 18\{(2-2\sqrt{6})^{n-2} + (2+2\sqrt{6})^{n-2}\}$

$- \frac{38}{\sqrt{6}}\{(2-2\sqrt{6})^{n-2} - (2+2\sqrt{6})^{n-2}\}$

$y_{n+1} = 4(x_n + y_n) = 4a_n$ より、

$a_n = \frac{y_{n+1}}{4} = \frac{9}{2}\{(2-2\sqrt{6})^{n-1} + (2+2\sqrt{6})^{n-1}\}$

$- \frac{19}{2\sqrt{6}}\{(2-2\sqrt{6})^{n-1} - (2+2\sqrt{6})^{n-1}\}$