第　3　問

(1)(ア)1回目も2回目も表のとき

確率は$\frac{1}{4}$　$x_1=f(x_0)=\frac{1}{2}$

$x_2=f(x_1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

(イ)1回目表, 2回目うらのとき

確率は$\frac{1}{4}$　$x_1=f(x_0)=\frac{1}{2}$

$x_2=g(x_1)=0$

(ウ)1回目うら, 2回目表のとき

確率は$\frac{1}{4}$　$x_1=g(x_0)=-1$

$x_2=f(x_1)=0$

(エ)1回目と2回目もうらのとき

確率は$\frac{1}{4}$　$x_1=g(x_0)=-1$

$x_2=g(x_1)=-3$

x_1だけを考えると、$\frac{1}{2}$の確率で$f(x_0)=\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{2}$の確率で$g(x_0)=-1$となる

∴ x_1の期待値は　$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

(ア)~(エ)より x_2の期待値は $\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}+0+0-3\right)=-\frac{9}{16}$

(2) このとき　$x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}$ である

$x_{n+1}-1=\frac{1}{2}(x_n-1)$

∠ $x_n-1=\left(\frac{1}{2}\right)^n(0-1)$ ∴ $x_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$　Ans, $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3) $x_{k+1}=f(x_k)=\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{2}$　$g(x_{k+1})=2\left(\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{2}\right)-1=x_k$

となり、$f(x)$と$g(x)$を使用した回数が等しければもとにもどる

. $k\geqq n-k$ 即ち $k\geqq\frac{n}{2}$のとき

表k回, うら$n-k$回より

$x_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-n+k}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-n}$

全部うらのとき

$x_{n+1}=2x_n-1$　$x_{n+1}-1=2(x_n-1)$

$x_n-1=2^n(0-1)$ ∴ $x_n=1-2^n$

∴ $k\leqq n-k$ 即ち $k\leqq\frac{n}{2}$のとき

$x_n=1-2^{n-k-k}=1-2^{n-2k}$

Ans, $\begin{cases} k\geqq\frac{n}{2}のとき & x_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-n} \\ k\leqq\frac{n}{2}のとき & x_n=1-2^{n-2k} \end{cases}$

レエヘ

(4) x_nの期待値をP_nとする

このときx_{n+1}の期待値は

$P_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}+2P_n-1\right)$

$=\frac{5}{4}P_n-\frac{1}{4}$

$P_{n+1}-1=\frac{5}{4}(P_n-1)$

$P_n-1=\left(\frac{5}{4}\right)^n(P_0-1)$

∴ $P_n=1-\left(\frac{5}{4}\right)^n$

(∵ $P_0=x_0=0$)

Ans, $1-\left(\frac{5}{4}\right)^n$

3 点数	20