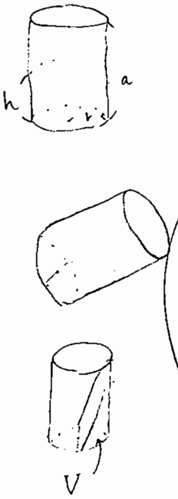
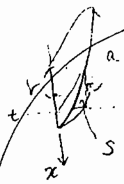
第　6　問

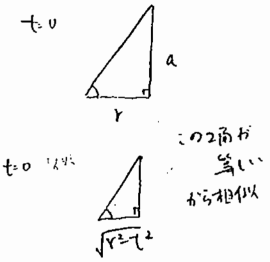


(1) 水がこぼれないための最大のV（左下図）の体積を求める。



左のようにx軸をとり、$x=t$で切れる断面積をSとする。$(-r\leqq t\leqq r)$

$t=0$のとき$S=\dfrac{ra}{2}$で、$t=0$のときの三角形と、それ以外のときの三角形は相似で、相似比は$r:\sqrt{r^2-t^2}$である。(右図)



よって面積比は$r^2:(r^2-t^2)$となり、$S=\dfrac{ra}{2}\cdot\dfrac{r^2-t^2}{r^2}$となる。

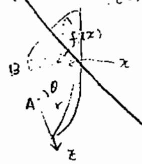
Vの体積は$\displaystyle\int_{-r}^{r}\frac{a}{2r}(r^2-x^2)dx$と表され、

$$=\frac{a}{r}\int_0^r(r^2-x^2)dx=\frac{a}{r}\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{a}{r}\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{2}{3}ar^2$$

また、元々の水の体積はπr^2hだから$\pi r^2h\leqq\dfrac{2}{3}ar^2$ならばこぼれない。つまり$r>0$より$a, h$の条件は

$\dfrac{3\pi}{2}\leqq\dfrac{a}{h}$となる。〃

(2) 求める部分の面積をTとすると左下図のようになる。この曲線を$f(x)$とおく。

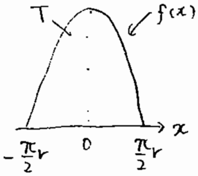


左のように$\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$をとると$r\theta=x$が成り立つ。左図で$AB=r\sin\theta$となり、

また、Vの高さは(1)より$\dfrac{3\pi h}{2}$であるから、$f(x)=\dfrac{3\pi h}{2}\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$=\frac{3\pi h}{2}\cos\theta=\frac{3\pi h}{2}\cos\theta\quad r\theta=x\text{より}\ dx=rd\theta$$

x	$-\frac{\pi}{2}r\longrightarrow\frac{\pi}{2}r$
θ	$-\frac{\pi}{2}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$



$$\int_{-\frac{\pi}{2}r}^{\frac{\pi}{2}r}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\pi h}{2}\cos\theta\cdot rd\theta$$

$$=3\pi hr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

$$=3\pi hr\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=3\pi hr$$

よって求める面積は$3\pi hr$である。〃

6 点数	20

(1) 10/10
(2) 10/10