2 点数	20

第 2 問

(1)

x_n: [n-1 ケタの数 | 奇] ← nケタ目

y_n: [n-1ケタの数 | 偶] ← nケタ目

x_nについて考えると
n+1ケタ目は(＊)より必ず偶数(2.4.6.8) ∴ y_{n+1}となる。
またy_nについて考えると
n+1ケタ目は1〜9のいずれでもよい。
n+1ケタ目が奇数(1.3.5.7.9)のときx_{n+1}となり
n+1ケタ目が偶数(2.4.6.8)のときy_{n+1}となる。

$$\therefore \quad x_{n+1} = 5y_n \quad ((＊)より\ n \geqq 2)$$
$$y_{n+1} = 4x_n + 4y_n$$
//

(2) $y_2 = 36$ (∵ 1ケタ目偶数、2ケタ目任意の数で、4×9)
$x_2 = 20$ (∵ 1ケタ目奇数、2ケタ目偶数で、5×4)

∴ (1)より
$y_3 = 4(x_2 + y_2)$
$= 224$

(1)より $y_{n+2} = 4y_{n+1} + 20y_n \quad (n \geqq 2)$

ここで $2-2\sqrt{6} = \alpha$、$2+2\sqrt{6} = \beta$とすると

$$y_{n+2} - \alpha y_{n+1} = \beta(y_{n+1} - \alpha y_n)$$
$$\therefore \quad y_{n+1} - \alpha y_n = \beta^{n-2}(y_3 - \alpha y_2) \quad \cdots ①$$
また
$$y_{n+2} - \beta y_{n+1} = \alpha(y_{n+1} - \beta y_n)$$
$$\therefore \quad y_{n+1} - \beta y_n = \alpha^{n-2}(y_3 - \beta y_2) \quad \cdots ②$$

① − ② より
$$(\beta - \alpha) y_n = \beta^{n-2}(y_3 - \alpha y_2) - \alpha^{n-2}(y_3 - \beta y_2) \quad (n \geqq 2)$$
$$\therefore (\beta - \alpha) y_{n+1} = \beta^{n-1}(y_3 - \alpha y_2) - \alpha^{n-1}(y_3 - \beta y_2) \quad (n \geqq 1) \quad \cdots ③$$

(1)より $y_{n+1} = 4x_n + 4y_n$
また $a_n = x_n + y_n$
$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{4} y_{n+1} \quad \cdots ④$$

今 $\beta - \alpha = 4\sqrt{6}$ より

③、④から
$$a_n = \frac{1}{4} y_{n+1}$$
$$= \frac{1}{16\sqrt{6}} \left[(2+2\sqrt{6})^{n-1} \{224 - (2-2\sqrt{6}) \cdot 36\} - (2-2\sqrt{6})^{n-1} \{224 - (2+2\sqrt{6}) \cdot 36\} \right]$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{96} \{ (2+2\sqrt{6})^{n-1}(152 + 72\sqrt{6}) - (2-2\sqrt{6})^{n-1}(152 - 72\sqrt{6}) \}$$
//