第 3 問

$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$　$g(x)=2x-1$

$x_0=0$

(1) $n=2$

① 1度目に表のとき

$x_1=\frac{1}{2}$

2度目に表 : $\frac{3}{4}$

裏 : 0

② 1度目に裏のとき

$x_1=-1$

2度目に表 : 0

裏 : -3

以上より

x_1の期待値は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{4}$

x_2の期待値は $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}+0+0-3\right)$

$=-\frac{9}{16}$

+4

(2) n回とも表が出たとき、

$x_0, x_1 \cdots x_n$ は

$x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}$ なる数列

$x_{n+1}-1=\frac{1}{2}(x_n-1)$

$\therefore x_0=0$ より

$x_n=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+1$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

+4

3 点数	20

(3) $f(g(x))=\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}=x$

$g(f(x))=2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-1=x$

より、$g=f^{-1}$ である …※

i) $k\geqq n-k$ つまり、$2n\geqq 2k\geqq n$ のとき

※より、x_nは、x_0に対し、$k-(n-k)$回fの操作を行った値に等しく

$x_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-n}$　($\because$ (1))

ii) $k\leqq n-k$ つまり、$n\geqq 2k\geqq 0$ のとき

※より x_nは x_0に対し、$n-k-k$回gの操作を行った値に等しい。

ここで、(2)のように、n回とも裏が出たときを考えると、(2)と同様

x_nは $x_{n+1}=2x_n-1$ なる数列。

$x_{n+1}-1=2(x_n-1)$

$\therefore x_0=0$ より

$x_n=(-1)\cdot 2^n+1$

$=1-2^n$

よって、x_0に対し、$n-2k$回gの操作を行った値は $1-2^{n-2k}$

$\therefore x_n=1-2^{n-2k}$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-n}$

i) ii) より、

$x_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-n}$ $(k=0,1,2\cdots n)$

+8

(4) n回中k回表が出て、n−k回裏が出る確率は、

$\frac{{}_nC_k}{2^n}$ であり

よって求める期待値は

$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_nC_k}{2^n}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-n}\right\}$

$=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k-\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$=\frac{1}{2^n}(1+1)^n-\left(1+\frac{1}{4}\right)^n$

$=1-\left(\frac{5}{4}\right)^n$

+4