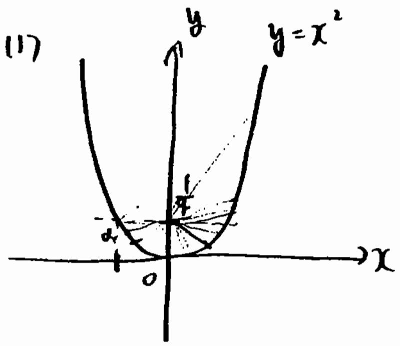
第 3 問

(1)



$A(\alpha, \alpha^2)$
$B(\beta, \beta^2)$

$\alpha \geqq -\frac{1}{2}$ とすると、$\angle AFB = 90°$ をみたし
$\overrightarrow{FB}$ を $90°$ 反時計回りして $\overrightarrow{FA}$ の方向となるように
$\alpha < \beta$ となる β をとることができない。
∴ $\alpha < -\frac{1}{2}$ が必要
同様に $\beta \leqq \frac{1}{2}$ とすると、$\alpha < \beta$ なる α をとることができない。
∴ $\beta > \frac{1}{2}$ が必要

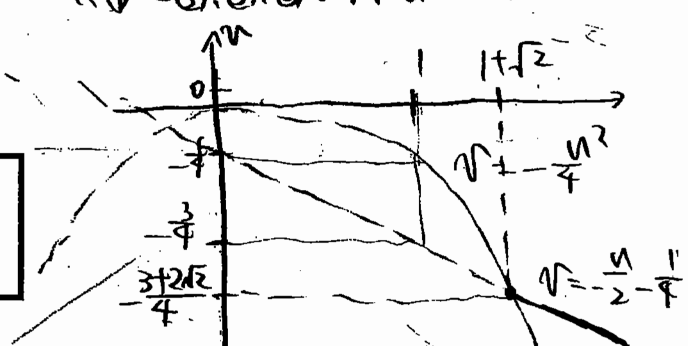
$\alpha\beta + \frac{1}{4} < 0$ ではOKでは
$v < -\frac{1}{4}$ と減点
-1

ここで $\alpha + \frac{1}{2} < 0 \land \beta - \frac{1}{2} > 0$ より
$(\alpha + \frac{1}{2})(\beta - \frac{1}{2})$ ← これだと「$\alpha + \frac{1}{2} > 0 \land \beta - \frac{1}{2} < 0$」も含まれてしまう。
$= \alpha\beta + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) - \frac{1}{4}$
$= \frac{u}{2} + v - \frac{1}{4} < 0$ …①
さらに $\alpha\beta = v < 0$ …② $\beta - \alpha > 1$ …③
これらの条件のもとで
FAの傾き: $\frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{\alpha - 0}$ FBの傾き: $\frac{\beta^2 - \frac{1}{4}}{\beta - 0}$ より (∵ $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$)
$\angle AFB = 90°$ なので

$$\frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{\alpha - 0} \cdot \frac{\beta^2 - \frac{1}{4}}{\beta - 0} = \frac{\alpha^2\beta^2 - \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{16}}{\alpha\beta}$$
$$= \alpha\beta - \frac{(\beta-\alpha)^2 + 2\alpha\beta}{4\alpha\beta} + \frac{1}{16\alpha\beta}$$
$$= v - \frac{u^2 + 2v}{4v} + \frac{1}{16v} = -1 \quad \text{…④}$$

このとき つねに $\overrightarrow{FB}$ を $90°$ 反時計回りすると $\overrightarrow{FA}$ の方向となるので十分。

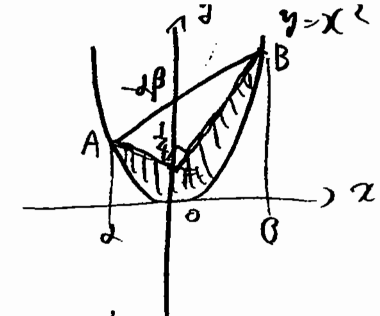
④ $\Leftrightarrow v^2 - \frac{u^2}{4} + \frac{v}{2} + \frac{1}{16} = 0$
$\Leftrightarrow (v + \frac{1}{4})^2 = \frac{u^2}{4} \Leftrightarrow v + \frac{1}{4} = \pm\frac{u}{2} \Leftrightarrow v = \pm\frac{u}{2} - \frac{1}{4}$ …⑤
さらに $u^2 + 4v = (\alpha + \beta)^2 \geqq 0$ …⑥
∴ ①~③, ⑤, ⑥ より求める範囲は以下



($v = -\frac{u}{2} - \frac{1}{4}$ の $u \geqq 1+\sqrt{2}$ の部分)

3 点数	19

(2) 求める面積は右図の斜線部のようになる。



直線ABとy軸との交点は
直線AB: $y = (\beta + \alpha)x - \alpha\beta$ より
$(x, y) = (0, -\alpha\beta)$
∴ (△FABの面積) $= (-\alpha\beta - \frac{1}{4}) \times (\beta - \alpha) \times \frac{1}{2}$
$= -\frac{1}{2}(\frac{1}{4} + v)u$ …④

(直線ABと放物線で囲まれた面積)
$$= \int_\alpha^\beta \{(\beta+\alpha)x - \alpha\beta - x^2\} dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta) dx$$
$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}u^3 \quad \text{…⑤}$$
∴ $S = ⑤ - ④ = \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + v)u$ …⑥
$v = -\frac{u}{2} - \frac{1}{4}$ より
⑥ $= \frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4}$ ($u \geqq 1+\sqrt{2}$)
$f(u) = \frac{u^3}{6} - \frac{u^2}{4}$ とおいて
$f'(u) = \frac{u^2}{2} - \frac{u}{2}$
$= \frac{u}{2}(u - 1)$

u	$1+\sqrt{2}$	~
$f'(u)$	+	+
$f(u)$		↗

$f(1+\sqrt{2}) = \frac{u^2}{12}(2u - 3)$
$= \frac{(1+\sqrt{2})^2}{12}(2\sqrt{2} - 1)$
$= \frac{5+4\sqrt{2}}{12}$ より

$\frac{5+4\sqrt{2}}{12} \leqq S = f(u)$

(1) +15/16 (2) +4/4