第 4 問

4 点数	20

(1)

$\angle ROA = \angle POQ = \angle POA - \angle QOA$ である。

$P(1, p)$, $Q(1, q)$ とおくと、

$\cos\angle POA = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$, $\sin\angle POA = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$

$\cos\angle QOA = \frac{1}{\sqrt{q^2+1}}$, $\sin\angle QOA = \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}$ なので、

$R(x, y)$ は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{q^2+1}} + \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\frac{q}{\sqrt{q^2+1}} \\ \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{q^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\cdot\frac{q}{\sqrt{q^2+1}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+pq \\ p-q \end{pmatrix}$$

$p, q \in \mathbb{N}$ より $x, y \in \mathbb{Z}$ なので、題意は示された。

(証明終)

(2)

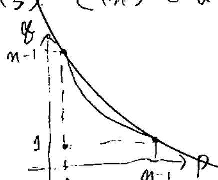
$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1+pq \\ p-q \end{pmatrix}$ は、$p, q > 0$ では単射である。

$1 + pq \leq 10 \Leftrightarrow pq \leq 9$ より、許される (p, q) の個数は

$p=1 \cdots 9$個 $p=2 \cdots 4$個, $p=3 \cdots 3$個, $p=4 \cdots 2$個, $p=5 \sim 9 \cdots 1$個.

よって $\underline{L(10) = 23}$

(3) $L(n)$ とは、$pq \leq n-1$ なる (p, q); $p, q \in \mathbb{N}^+$ の個数である。



$$\therefore \sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{n-1}{p} - 1\right) \leq L(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1}\left(\frac{n-1}{p} + 1\right)$$

$$\therefore \sum_{p=1}^{n-1}\frac{n-1}{p} - (n-1) \leq L(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1}\frac{n-1}{p} + (n-1).$$

$\log n = \int_1^n \frac{dx}{x} < \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} < 1 + \int_1^{n-1}\frac{dx}{x} = 1 + \log(n-1)$ だから、

$$(n-1)\log n - (n-1) \leq L(n) \leq (n-1)\log(n-1) + 2(n-1).$$

$$\therefore \frac{n-1}{n} - \frac{n-1}{n\log n} \leq L(n) \leq \frac{n-1}{n-1}\cdots$$

$\therefore L(n) \to 1$ 〜 (答)