第　4　問

| 4<br>点<br>数 | 20 |
| --- | --- |

(1) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}$

よって、$I_1$を選ばなければ、

全て $x_n<\frac{1}{2}$ となる

従って、

確率は $\frac{1}{2}$

(2) $I_1$を選ぶと、$x_n \geqq \frac{1}{2}>\frac{3}{8}$ より

不適

i) $I_2$を選ぶ場合

$I_3$を選ぶと、$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ より 不適

また、

$\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2^n}<\frac{1}{8}$

より、$I_3$を選ばなければよいので、

$$\underset{I_1を選ばず}{\frac{1}{2}}\times\underset{I_2を選ぶ}{\frac{1}{2}}\times\underset{I_3を選ばず}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$$

ii) $I_2$を選ばない場合

$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2^n}<\frac{3}{8}$

より、何を選んでもよいので、

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

i) ii) より、これらは排反かつ全ての場合が

尽くされているので、

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

(3) $I_1$を選ぶと、$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$ より、不適

ここで、$k$・$m$を任意の自然数として、

・$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{2m}}$

$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^m}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^m\right\}<\frac{1}{3}$

・$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{2^{2m+1}}$

$=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^m\right\}+\frac{1}{2^{2m+1}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^{2m}}>\frac{1}{3}$

・$\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+2}}+\frac{1}{2^{k+3}}+\cdots+\frac{1}{2^m}$

$=\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^k}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}\right\}<\frac{1}{2^k}$

この3式から、

$I_2$・$I_4$・$I_6$ … $I_{2m}$ と選んだとして、

$$\begin{cases} I_{2m+1}\text{を選ぶ} \longrightarrow x_n>\frac{1}{3} \\ I_{2m+2}\text{を選ぶ} \longrightarrow x_n<\frac{1}{3} \\ I_{2m+1}\cdot I_{2m+2}\text{共に選ばない} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ 以降は何を選んでも $x_n<\frac{1}{3}$

ということがわかる。

以上より、

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\underset{I_1\times}{\frac{1}{2}}\times\left\{\underset{I_2\times}{\frac{1}{2}}+\underset{I_2\circ}{\frac{1}{2}}\times\underset{I_3\times}{\frac{1}{2}}\times\underset{I_4\times}{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}+\cdots\right\}$$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}$　$\left(\because \left|\frac{1}{2}\right|<1\right)$

$=\frac{1}{3}$