5 点数 20

(1) PはABを $(1-S):S$ に内分する点なので、

$$\begin{cases} x = St + (1-S)u \\ y = (1-S)v \\ z = St \end{cases}$$

+4

(2) (1)より $t = \frac{z}{S}$　$v = \frac{y}{1-S}$

$$u = \frac{x-z}{1-S}$$

と表される。

ABの長さが1であることより、

$$(t-u)^2 + v^2 + t^2 = 1$$

$$\therefore \left(\frac{z}{S} - \frac{x-z}{1-S}\right)^2 + \left(\frac{y}{1-S}\right)^2 + \left(\frac{z}{S}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{-Sx+z}{S-S^2}\right)^2 + \left(\frac{Sy}{S-S^2}\right)^2 + \left(\frac{(1-S)z}{S-S^2}\right)^2 = 1$$

求める立体の $z = p$ における $(-S \leq p \leq S)$ 断面を考える。

$$(-Sx+p)^2 + (Sy)^2 + \{(1-S)p\}^2 = (S-S^2)^2$$

$$(x - \frac{p}{S})^2 + y^2 + \{(1-S)\frac{p}{S}\}^2 = (1-S)^2$$

$$(x-\frac{p}{S})^2 + y^2 = (1-S)^2\left(1-\frac{p^2}{S^2}\right)$$

よって $z=p$ での断面は

$(\frac{p}{S}, 0)$ を中心とした半径 $(1-S)\sqrt{1-\frac{p^2}{S^2}}$ の円

∴ 求める体積 V は

$$V = \int_{-S}^{S} (1-S)^2\left(1-\frac{p^2}{S^2}\right)\pi\, dp$$

$$= \pi\left(\frac{1-S}{S}\right)^2 \int_{-S}^{S} (S^2 - p^2)\, dp$$

$$= \pi\left(\frac{1-S}{S}\right)^2 \left[S^2 p - \frac{1}{3}p^3\right]_{-S}^{S}$$

$$= \frac{4}{3}\pi S(1-S)^2$$

+10

(3) Vが最大になるのは、

$S(1-S)^2$ が $0<S<1$ において最大になる時。

$f(S) = S(1-S)^2$ として、

$$f'(S) = 3S^2 - 4S + 1$$

$$f'(S) = 0 \iff S = \frac{1}{3}, 1$$

S	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$f'(S)$		$+$	0	$-$	(0)
$f(S)$	0	↗		↘	0

$f(\frac{1}{3})$

∴ $f(S)$ の最大値は

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

∴ Vの最大値は

$S = \frac{1}{3}$ のときで、$\frac{16}{81}\pi$

+6