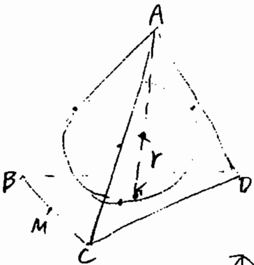
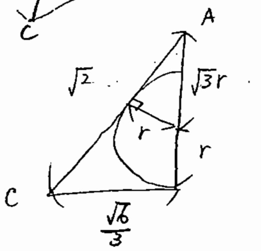
5 点数	11



対称性より、
△BCDとの接点は重心。
半径をrとすると。



$\sqrt{3}r + r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ +2

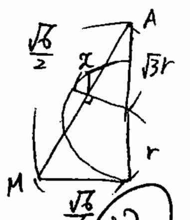
⇔ $r = \frac{2\sqrt{3}}{3(\sqrt{3}+1)}$

$= \frac{3-\sqrt{3}}{3}$ +3

よって、面ABCからはみ出た球の体積をV'とすると、求めるVは、

$$V = \frac{1}{3} - \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - 3V'\right)$$ +2

ここで、はみ出した部分は、BCの中点Mとして、

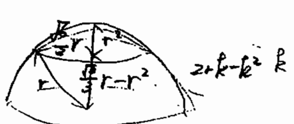


+2

$(r-x) : \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{6}}{6} : \frac{\sqrt{6}}{2}$

⇔ $\sqrt{3}r = 3r - 3x$

⇔ $x = \frac{3-\sqrt{3}}{3}r$ +2



よって、

$$V' = \int_0^{r^2} \pi(2rk - k^2)\,dk$$

$$= \pi\left[r^5 - \frac{1}{3}r^6\right]$$

∴ $V = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\pi r^3 + 3\pi r^5 - \pi r$

$= \frac{1}{3} - \frac{\pi}{3}r^3(4 - 9r^2 + 3r^3)$

$= \frac{1}{3} - \pi \cdot \frac{18-10\sqrt{3}}{27} \times \left(4 - 12 + 6\sqrt{3} + 6 - \frac{10}{3}\sqrt{3}\right)$

$= \frac{1}{3} - \pi \cdot \frac{18-10\sqrt{3}}{27} \times \left(-2 + \frac{6}{3}\sqrt{3}\right)$

$= \frac{1}{3} + \pi \times \frac{18-10\sqrt{3}}{27} \times \frac{6-6\sqrt{3}}{3}$ ($2-2\sqrt{3}$)

$= \frac{1}{3} + \pi \times \frac{96-56\sqrt{3}}{27}$