数学 理科 第2解答用紙

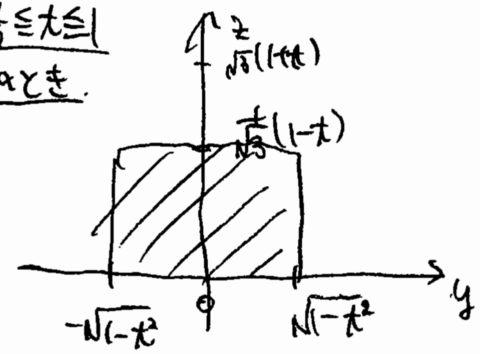
第 6 問

$x=t$ で図形を切る。切り口は

$$\begin{cases} t^2+y^2 \le 1 \iff -\sqrt{1-t^2} \le y \le \sqrt{1-t^2} & \text{—①} \\ z \ge 0 \\ z \le \sqrt{3}(1+t) \\ z \le \frac{1}{\sqrt{3}}(1-t) \end{cases}$$

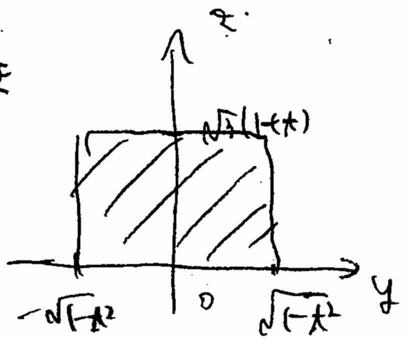
①より $|t| \le 1$ が成立する(←yの存在条件)
これを yz 平面上に図示すると以下。

(i) $-\frac{1}{2} \le t \le 1$ のとき



($-\frac{1}{2} \le t \le 1$ のとき $\sqrt{3}(1+t) \ge \frac{1}{\sqrt{3}}(1-t)$ であることを考えた)

(ii) $-1 \le t \le -\frac{1}{2}$ のとき



($-1 \le t \le -\frac{1}{2}$ のとき $\frac{1}{\sqrt{3}}(1-t) \ge \sqrt{3}(1+t)$ である)

(i) のとき 切り口の断面積は

$$2\sqrt{1-t^2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}(1-t)$$

(ii) のとき

$$2\sqrt{1-t^2} \times \sqrt{3}(1+t)$$

であるから、これを積分して

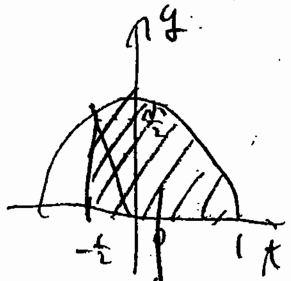
$$V = \int_{-\frac12}^{1} \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-t^2}\cdot(1-t)\,dt + \int_{-1}^{-\frac12} 2\sqrt{3}\sqrt{1-t^2}\cdot(1+t)\,dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac12}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt + \int_{-\frac12}^{1} \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-t^2}\cdot(-2t)\,dt$$

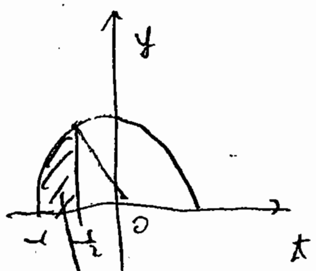
$$+ 2\sqrt{3}\int_{-1}^{-\frac12} \sqrt{1-t^2}\,dt - \int_{-1}^{-\frac12} \sqrt{3}\sqrt{1-t^2}(-2t)\,dt$$

ここで、

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac12}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt + 2\sqrt{3}\int_{-1}^{-\frac12} \sqrt{1-t^2}\,dt$$



$\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}$



$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

だから、これは

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) + 2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{9}\pi - \frac{1}{2}$$

また、

$$\int_{-\frac12}^{1} \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-t^2}(-2t)\,dt - \int_{-1}^{-\frac12} \sqrt{3}\sqrt{1-t^2}(-2t)\,dt$$

$$= \int_{\frac34}^{0} \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{X}\,dX - \int_{0}^{\frac34} \sqrt{3}\sqrt{X}\,dX$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{2}{3}X^{\frac32}\right]_{\frac34}^{0} - \sqrt{3}\left[\frac{2}{3}X^{\frac32}\right]_{0}^{\frac34}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac32} - \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac32}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$$

ゆえ、これを足し合わせて

$$V = \frac{5\sqrt{3}}{9}\pi - \frac{3}{2}$$

6 点数	20