01 TOSHIN TIMES SPECIAL NUMBER

志望校合格を目指す生徒とそのご父母のための大学進学情報紙

TOSHIN TIMES

学力増進号 vol.6 ～2015～
数学「場合の数」編

円順列を極める！

円順列の問題なんて公式を使って１発で解けるって思っている人も多いと思うけど、理解を伴わない公式の丸暗記では難関な入試問題に対応することは難しい。
ということで、今日は理屈をきちんと確認しながら、円順列を極めてもらいます！

東進数学科講師・沖田 一希先生による紙上講義！

まずは、教科書レベルの問題から！

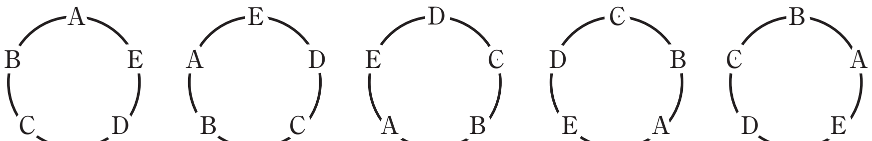
例題１
男子5人と女子2人がいる．このとき
(1) 男子5人を横一列に並べる並べ方は何通りあるか．
(2) 男子5人を円形に並べる並べ方は何通りあるか．
(3) この7人が円形に並ぶとき，女子2人が隣り合わないような並べ方は何通りあるか．

解答
(1) 5人の男子を A、B、C、D、E とするね。
この5人を左から横一列に並べよう。
1番左側にくる可能性があるのは A、B、C、D、E の 5通り。
仮に、A がきたとすると、
左から2番目にくる可能性があるのは B、C、D、E の 4通り。
仮に、C がきたとすると、
左から3番目にくる可能性があるのは B、D、E の 3通り。
仮に、E がきたとすると、
左から4番目にくる可能性があるのは B、D の 2通り。
仮に、B がきたとすると、
左から5番目にくる可能性があるのは D の 1通り。
こうした一連の操作、連続操作はそれぞれ場合の数を積で結べばよかったので、
$5\times4\times3\times2\times1=120$（通り）……（答）
これを $5!$ と書いたり、${}_5P_5$ と書くんだったね。

＜順列＞の公式
n 人や異なる n 文字を並べるときは
$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times3\times2\times1\ (={}_nP_n)$

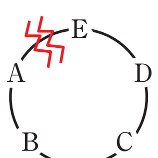
掛け算で結ぶことがピンとこない人は、一度、中学校で習った樹形図を書いて、最終的に小枝が120本に分かれることを確かめるといいでしょう。

(2) 今度は、5人を円形に並べてみるね。



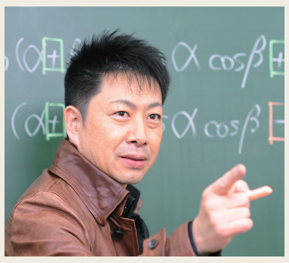
例えば、上のように5人を円形に並べた状態は、日常生活では違うものかもしれないけど、数学では同じものと考えるんだ。

その理由は5つの円を A と E のところで切って A を先頭にして並べると



⇒ A → B → C → D → E

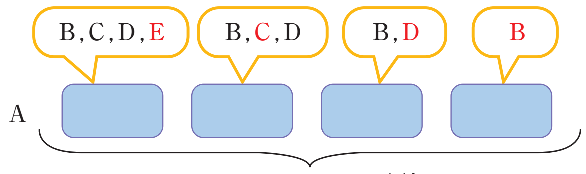
と、すべて同じになるからだ。



東進数学科講師・沖田 一希先生

数学が苦手、でも何とかしたいという高校生の期待に応え、短期間で数学力を徹底的に養成し、バラバラな知識を統一・体系化していくプロ中のプロである。熱く情熱的な沖田ワールドは時が経つのを忘れさせ、君の数学力を飛躍的に向上させる。

そこで、5人を円形に並べるときは、この重複を避けるために、
まず5人の中から主役を決めて、残りの4人を横一列に並べる。
そして、先頭の人と最後尾の人を繋げて円形に戻すと考えるといい！
今回は A を主役として残りの4人を並べると考えて



$4\times3\times2\times1=24$ 通り

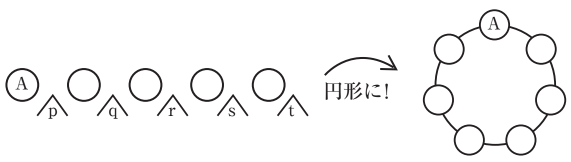
先頭の A と最後尾を繋げて円形にしても場合の数は変わらないので、24通り
つまり、
$(5-1)!=4!$
$=4\times3\times2\times1$
$=24$（通り）…（答）

$\dfrac{5!}{5}$ ←(1)で求めた5人の並べ方 ←ダブり
$=\dfrac{5\times4!}{5}=4!$ と考えてもよい

＜円順列＞の公式
n 人や異なる n 文字を円形に並べるときは
$(n-\underset{\substack{\uparrow\\ \text{主役}}}{1})!=(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times3\times2\times1$ 通り

(3) 円順列の公式を確認したけど、実はこの円順列の公式は意外と使い勝手が悪い！むしろ円順列の公式を作るときに説明した理屈で考えると、頭の中が整理できるはずだ。というわけで(2)と同様に考えていくぞ。

あと、この問題のもうひとつのポイントは『隣り合わない』の処理！
隣り合わないものを並べるときはまず、「隣り合っていいもの」を並べて、次に隣り合わないような場所を選んで、その場所に、「隣り合ってはいけないもの」を 押し込むように 並べるといいぞ！選ぶときは ${}_nC_r$ を使えばよかったよね。



まずA君を先頭にして、残りの男子4人を一列に並べる（⇒4！通り）
次に図の p、q、r、s、t が隣り合わない場所として5か所から2か所を選んで（⇒${}_5C_2$ 通り）、その位置に女子2人を 押し込むように 並べる。（⇒2！通り）
最後に先頭のA君と最後尾の人を結び、円形にしても場合の数は変わらないので、$4!\times{}_5C_2\times2!=480$（通り）……（答）

＜隣り合わない＞のPOINT
まず，「隣り合ってもいいもの（人）」を並べる。
次に，隣り合わないような場所を選ぶ。
その場所に「隣り合ってはいけないもの（人）」を押し込むように並べる。

裏面へ続く！⇨

C M Y K

次に、もう少しレベルの高い問題を考えよう。でもその前に下準備！

例題２

A, ●, ●, ●の4文字の並べ方は何通りか．

解答

実際に書き出すと

「A●●●」、「●A●●」、「●●A●」、「●●●A」 の4通りとすぐに分かるけれど、

これをあえて順列の公式を使って考えてみると、

A、B、C、D の4文字なら、並べ方は $4!=24$ 通りだけど、

いまは B、C、D がすべて●になり、B、C、D 3文字の並べ方 $3!=6$ 通りの区別がつかなくなったと考えるといいんだ。

$\frac{4!}{3!}=\frac{24}{6}=4$（通り）……（答）

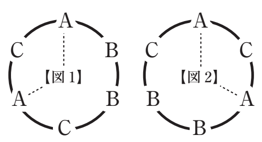
<ダブリを含んだ順列>の公式

$$\frac{(\text{並べるものの個数})!}{(\text{ダブリの個数})!}$$

下準備が完了したところで、次の問題を解いてみよう！

例題３

A, A, B, B, C, C の6文字を円形に並べる方法は何通りあるか．ただし，右の2つは一方を回転させると他方に一致する（図2を120°回転させると図1になる）が，このような2つは同じ並べ方だとみなすことにする．



解答

A、B、C、D、E、F の6文字の円順列なら、A を先頭にして残りの5文字を並べてから、先頭の A と最後尾の文字をつなげて円形にすると考えて

$(6-1)!$

でいい。でも、この問題では同じ文字が2つずつあるので、一見すると違うように見えても図1と図2のように60°、120°、180°、240°、300°と回転することで重複するものができるために、$(6-1)!$ は使えないんだ。

とはいえ、円順列の「主役を先頭にして、残りを並べる」という発想はとても大事。

いま、A を主役にしてみよう！ A が2つあって困るよね。

こんなときは2つ目の A の位置で場合分けをするといいんだ。

2つ目の A の位置で場合分けをすると、

（イ） A—A—□—□—□—□

（ロ） A—□—A—□—□—□

（ハ） A—□—□—A—□—□

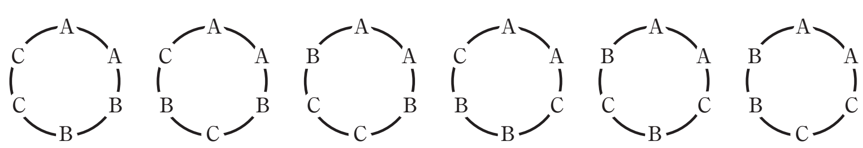
の3つの場合がある。

（イ）の場合

4つの□に B、B、C、C の4文字を並べる方法は

$\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\times3\times2\times1}{2!\times2\times1}=6$（通り）

この6通りすべてを、主役のAが真上にくるような形で円形に戻して書き出すと、



それぞれを、回転しても重なるものはない。よって6通り。

（ロ）の場合

4つの文字の並べ方は（イ）と同様に6通り。

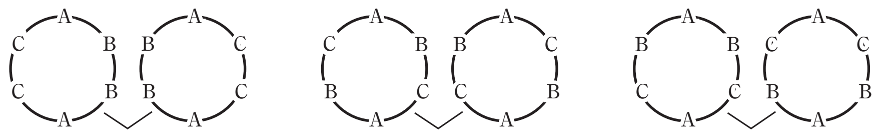
この場合も主役の A が真上にくるような形で円形に戻し、

それぞれを回転しても重なるものはないので、6通り。

（ハ）の場合

4つの文字の並べ方は（イ）、（ロ）と同様に6通り。

この6通りを、主役の A が真上にくるような円形に戻して書き出してみると下のとおり。ところが、180°回転すると重なるものが2組ある。



重なる　　重なる相手なし　　重なる

つまり、実質4通りしかない。

以上（イ）、（ロ）、（ハ）より求める場合の数は

$6+6+4=16$（通り）……（答）

それでは、最後に京大の問題にチャレンジしてみよう！

チャレンジ問題

互いに同形のガラス玉 g 個と，互いに同形のダイヤモンド d 個と，表裏のあるペンダント1個とを，まるくつないでネックレス状のものをつくる．ただし，ペンダントの両隣はダイヤモンドにする．（$d\geqq2, g\geqq1$）

（1） 何通りのつくり方があるか．

（2） どの2個のダイヤモンドも隣り合わないことにしたら，何通りのつくり方があるか．

京都大（法（B））-62

ネックレス状のものをつくるので、ペンダントは表に向くとして考えよう。

この問題の解説はWebで！

TOSHIN TIMES

発行 東進本部

発行人 永瀬昭幸

本部 〒180-0003 東京都武蔵野市吉祥寺南町1-29-2

編集 株式会社ナガセ広報部

TEL:0422-44-9001

禁・無断転載