2008年度大学入試センター試験　解説〈数学ⅡB〉

第１問

〔１〕

$3^{1+\log_{10}x}-5^y=1$　……(＊)

$\log_{10}x$ の真数条件より　$x>\underline{\underline{0}}$　……ア

次に(＊)より　$5^y=3^{1+\log_{10}x}-1=\underline{\underline{3}}\cdot 3^{\log_{10}x}-1$　……イ

$z=3^{\log_{10}x}$　とおくと，$5^y=3z-1>0$　であるから

$$z>\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$　……ウ，エ

となる．

さらに，

$$K=\frac{5^y}{3}+3^{-\log_{10}x}=\frac{3z-1}{3}+z^{-1}=z+\underline{\underline{\frac{1}{z}-\frac{1}{3}}}$$　……オ，カ

ここで，$z>0$ であるから，相加平均≧相乗平均より

$$z+\frac{1}{z}\geqq 2\sqrt{z\cdot\frac{1}{z}}=2$$

が成り立つ．等号が成立するのは，

$z=\dfrac{1}{z}$　かつ　$z>0$　すなわち　$z=\underline{\underline{1}}$　のとき　……キ

で，このとき K は最小値　$2-\dfrac{1}{3}=\underline{\underline{\dfrac{5}{3}}}$　をとる．　……ク，ケ

このとき，$3^{\log_{10}x}=1$　より　$\log_{10}x=0$

すなわち，$x=\underline{\underline{1}}$　であり　……コ

$$5^y=3^{1+\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\log_{10}1}}}-1=3^1-1=2\ \text{より}$$

$$y=\underline{\underline{\log_5 2}}$$　……サ，シ

である．

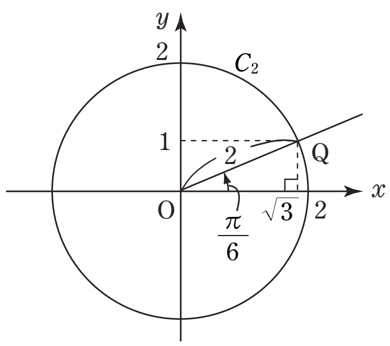
〔２〕

(1)　$\theta=\pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$

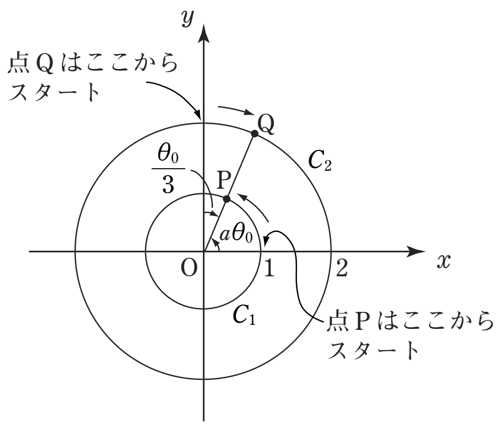
よって Q の座標は

$$\left(2\cos\frac{\pi}{6},\ 2\sin\frac{\pi}{6}\right)=\underline{\underline{(\sqrt{3},\ 1)}}$$　……ス，セ

である．



(2)　3点O，P，Qがこの順に一直線上にあるときのθの値で最小のものをθ_0とすると，$\theta=\theta_0$となるのは右図のような場合である．



よって，

$$a\theta_0=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta_0}{3}$$

$$\frac{3a+1}{3}\theta_0=\frac{\pi}{2}$$

ここで，$a>0$より　$3a+1\neq 0$

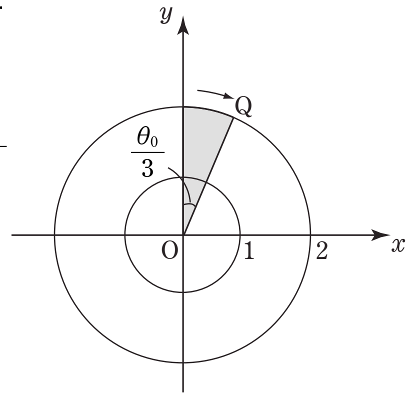
よって，　$\theta_0=\dfrac{3\pi}{2(3a+1)}=\underline{\underline{\dfrac{3}{6a+2}}}\pi$

……ソ，タ，チ

また，θが$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{6a+2}\pi$の範囲を動くとき，

線分OQは，半径2，中心角$\dfrac{\pi}{2}-\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta_0}{3}\right)=\dfrac{\theta_0}{3}$

の扇形（右図の網目部分）を描く．



したがって，その面積Sは，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\theta_0}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{6a+2}\pi=\underline{\underline{\frac{1}{3a+1}}}\pi$$

……ツ，テ，ト

(3)　△OPQに余弦定理を用いると，

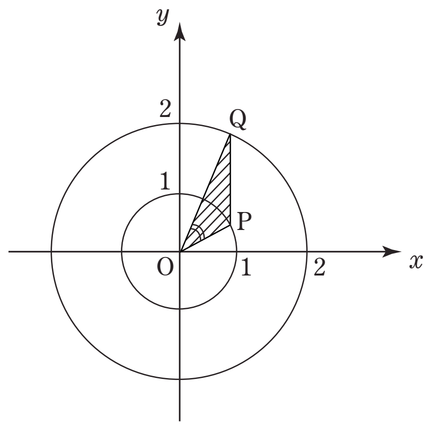
$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2-2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cos\angle\mathrm{POQ}$$

$$=1^2+2^2-2\cdot 1\cdot 2\cos\left|\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}\right)-a\theta\right|$$

$$=5-4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3a+1}{3}\theta\right)$$

$$=\underline{\underline{5-4\sin\left(\frac{3a+1}{3}\theta\right)}}$$

……ナ～ノ



である．

(4)　$f(x)=5-4\sin\left(\dfrac{3a+1}{3}x\right)$

ここで，$\sin kx$の最小の正の周期は$2\pi\times\dfrac{1}{k}=\dfrac{2\pi}{k}$であるから，これが$4\pi$となる

のは，$k=\dfrac{1}{2}$のときである．すなわち，$\dfrac{3a+1}{3}=\dfrac{1}{2}$となればよいので，

$$a=\frac{1}{\underline{\underline{6}}}$$

……ハ，ヒ

第2問

$$\begin{cases} C_1 : \ y = \dfrac{1}{8}x^2 & \cdots\cdots① \\ C_2 : \ y = -x^2 + 3ax - 2a^2 \quad (a > 0) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

(1)　C_1 と C_2 の共有点Pの x 座標は，①，②より

$$\frac{1}{8}x^2 = -x^2 + 3ax - 2a^2$$

$$9x^2 - 24ax + 16a^2 = 0$$

$$(3x - 4a)^2 = 0$$

$$x = \frac{4}{3}a$$

$$y = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{2}{9}a^2$$

よって　$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{3}a,\ \dfrac{2}{9}a^2\right)$　……**ア，イ，ウ，エ**

また，$f'(x) = \dfrac{1}{4}x$　より　$f'\left(\dfrac{4}{3}a\right) = \dfrac{1}{3}a$

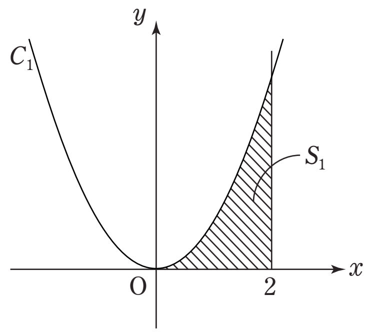
よって，点Pにおける C_1 の接線の方程式は，

$$y - \frac{2}{9}a^2 = \frac{1}{3}a\left(x - \frac{4}{3}a\right)$$

$$y = \frac{1}{3}ax - \frac{2}{9}a^2$$

……**オ，カ，キ，ク**

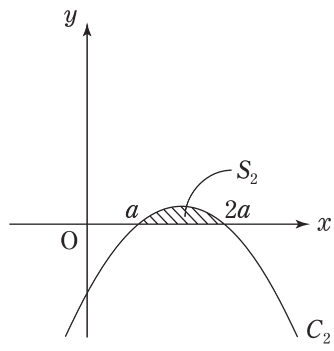
C_1 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は
$y - f(t) = f'(t)(x - t)$



(2)　C_1 と x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を S_1，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする．
このとき，

$$S_1 = \int_0^2 \left(\frac{1}{8}x^2\right)dx = \frac{1}{24}\Big[\,x^3\,\Big]_0^2 = \frac{1}{3}$$　……**ケ，コ**

である．



また，C_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$-x^2 + 3ax - 2a^2 = 0$$

の解である．よって，

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$$

$$(x - a)(x - 2a) = 0$$

$$x = a,\ 2a$$　……**サ，シス**

である．

さらに

$$S_2=\int_a^{2a}(-x^2+3ax-2a^2)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3a}{2}x^2-2a^2x\right]_a^{2a}$$

$$=\left(-\frac{8}{3}a^3+6a^3-4a^3\right)-\left(-\frac{a^3}{3}+\frac{3}{2}a^3-2a^3\right) \quad \cdots\cdots(*)$$

$$=4a^3-\frac{7}{3}a^3-\frac{3}{2}a^3$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}a^3$$ である．　……セ，ソ

(＊)の(別解)

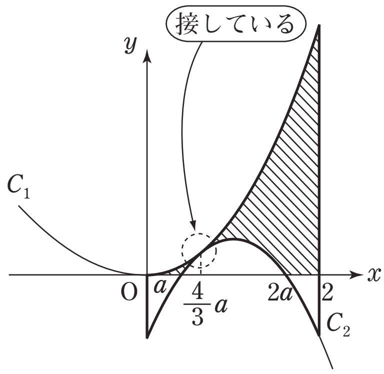
$$S_2=\int_a^{2a}(-x^2+3ax-2a^2)\,dx$$

$$=-\int_a^{2a}(x-a)(x-2a)\,dx$$ ← $\left[\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right.$ の利用$\left.\right]$

$$=\frac{1}{6}(2a-a)^3$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}a^3 \quad \cdots\cdots セ，ソ$$

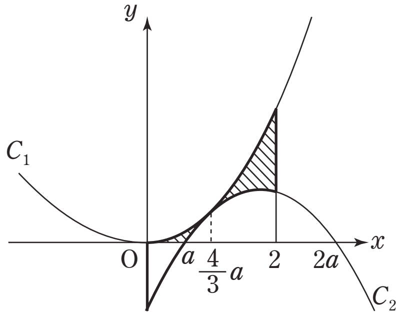
(3)　$S(a)$ は次の3つに場合分けできる．(R は図の太線で囲まれた部分である．)



(ⅰ)　$0<2a\leqq2$，すなわち　$0<a\leqq\underline{\underline{1}}$ のとき　……タ

$$S(a)=S_1-S_2=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{3}$$

(ⅱ)　$a\leqq2<2a$，すなわち　$1<a\leqq\underline{\underline{2}}$ のとき　……チ

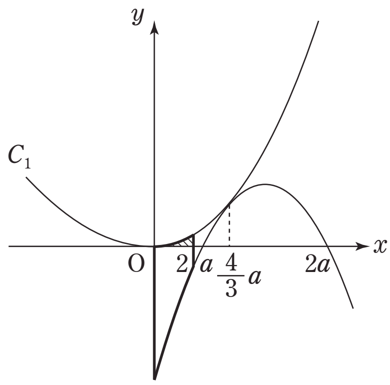


$$S(a)=S_1-\int_a^2(-x^2+3ax-2a^2)\,dx$$

$$=S_1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3a}{2}x^2+2a^2x\right]_a^2$$

$$=\frac{1}{3}+\left\{\left(\frac{8}{3}-6a+4a^2\right)-\left(\frac{a^3}{3}-\frac{3}{2}a^3+2a^3\right)\right\}$$

$$=\underline{\underline{-\frac{5}{6}a^3+4a^2-6a+3}} \quad \cdots\cdots ツ〜ニ$$



(iii)　$2<a$ のとき

$$S(a)=S_1=\frac{1}{3}$$

ここで，(ii) のとき

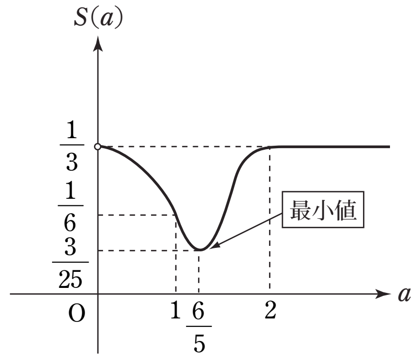
$$S'(a)=-\frac{5}{2}a^2+8a-6$$

$$=-\frac{1}{2}(5a^2-16a+12)$$

$$=-\frac{1}{2}(5a-6)(a-2)$$

よって，増減表は以下のようになる．

a	1		$\frac{6}{5}$		2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	0
$S(a)$		↘		↗	



$$S\left(\frac{6}{5}\right)=-\frac{5}{6}\left(\frac{6}{5}\right)^3+4\left(\frac{6}{5}\right)^2-6\cdot\frac{6}{5}+3$$

$$=\frac{3}{25}$$

これと (i)，(ii)，(iii) を合わせて $S(a)$ のグラフを描くと右のようになる．

よって，$S(a)$ は

$a=\underline{\underline{\frac{6}{5}}}$　のとき　最小値 $\underline{\underline{\frac{3}{25}}}$ ……ヌ〜ヒ

をとる．

第3問

(1)　$a_n = 7 + (n-1)\cdot(-4) = \underline{\underline{-4}}n + \underline{\underline{11}}$　……**アイ，ウエ**

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}(-4k+11)\\ &= \frac{n(7-4n+11)}{2}\\ &= \frac{n(-4n+18)}{2}\\ &= -2n^2+9n\end{aligned}$$

$\left[\ \sum_{k=1}^{n}(\text{等差数列}) = \dfrac{\text{項数}\cdot(\text{初項}+\boxed{\text{末項}})}{2}\ \right]$

……**オカ，キ**

(2)　$b_n = pn^2 - qn - r$　より，$b_{n+1} = p(n+1)^2 - q(n+1) - r$

よって，

$$\begin{aligned}b_{n+1} - 2b_n &= p(n+1)^2 - q(n+1) - r - 2(pn^2 - qn - r)\\ &= -pn^2 + (2p+q)n + p - q + r\end{aligned}$$

$b_{n+1} - 2b_n = -2n^2 + 9n$　……①　より，係数を比較すると，

$$\begin{cases} -p = -2 \\ 2p + q = 9 \\ p - q + r = 0 \end{cases}$$

これを解くと，$p = \underline{\underline{2}}$，$q = \underline{\underline{5}}$，$r = \underline{\underline{3}}$　……**ク，ケ，コ**

よって，$b_1 = p - q - r = 2 - 5 - 3 = \underline{\underline{-6}}$　……**サシ**

$c_1 = 1$

$c_{n+1} - 2c_n = -2n^2 + 9n$　……②

②−①より　$(c_{n+1} - b_{n+1}) - 2(c_n - b_n) = 0$

$d_n = c_n - b_n$　とおくと

$d_{n+1} - \underline{\underline{2}}d_n = 0$　……**ス**

すなわち　$d_{n+1} = 2d_n$

ここで　$d_1 = c_1 - b_1 = 1 - (-6) = 7$

よって　$d_n = 7\cdot 2^{n-1}$

[$\{d_n\}$ は初項7，公比2の等比数列]

すなわち　$c_n - b_n = 7\cdot 2^{n-1}$

したがって，$b_n = 2n^2 - 5n - 3$　より

$c_n = \underline{\underline{7\cdot 2}}^{n-1} + 2n^2 - 5n - 3$　……**セ，ソ**

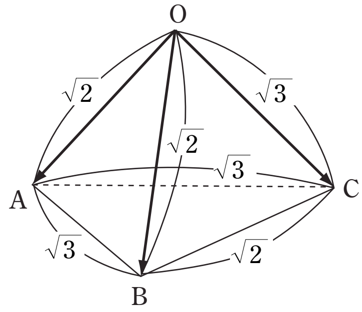
さらに

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} c_k &= \sum_{k=1}^{n}(7\cdot 2^{k-1}+2k^2-5k-3)\\ &= \sum_{k=1}^{n} 7\cdot 2^{k-1}+2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}(5k+3) \quad \leftarrow \left[\text{項別に}\sum\text{計算}\right]\\ &= \frac{7\cdot(2^n-1)}{2-1}+2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{n}{2}(8+5n+3)\\ &= \underline{\underline{7\cdot 2^n+\frac{2}{3}n^3-\frac{3}{2}n^2-\frac{31}{6}n-7}}\end{aligned}$$

[・第1項は(等比の和)
・第3項は(等差の和)
を用いた]

……**タ～ノ**

第4問



(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=(\sqrt{3})^2=3$　……ア

であり，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$　より

$$3=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$　……イ，ウ

である．

同様に　$|\vec{b}-\vec{c}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$$2=2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+3$$

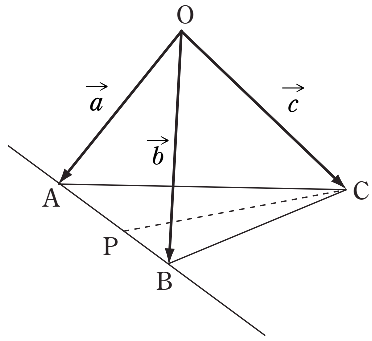
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{3}{2}$$　……エ，オ

$$|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$$

$$3=3-2\vec{c}\cdot\vec{a}+2$$

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=1$$　……カ

である．



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=0$　より

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\vec{a}=0$$

すなわち

$$\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}\}\cdot\vec{a}=0$$

$$(1-t)|\vec{a}|^2+t\,\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

(1)の結果より，

$$2(1-t)+\frac{1}{2}t-1=0$$　よって，$t=\frac{2}{3}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}$　……キ～コ

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，点Pは線分ABを $2:1=1:\frac{1}{2}$ に内分する．　……サ，シ

(注)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　として考えてもよい．

また，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{2}{3}|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot 2-\frac{3}{2}$$

$$=0$$　……ス

であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=\left|\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{c}\right|^2$$

$$=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{4}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot 2+\frac{4}{9}\cdot 2+3+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\cdot 1$$

$$=\frac{15}{9}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ ……セソ，タ

である．

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{b}=0$　より　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は三角形OAB (③) ……チ

の各辺と垂直であり，直線CPは三角形OABを含む平面に垂直である．

三角形OABの面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$ ……ツテ，ト

したがって，四面体OABCの体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{S}_{\text{底面積}}\cdot\underbrace{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|}_{\text{高さ}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{5}{12}$$ ……ナ，ニヌ

である．