2009 年度大学入試センター試験　解説〈数学ⅠA〉

第１問

〔１〕

A を y について整理して因数分解すると，

$$\begin{aligned} A &= 6x^2+5xy+y^2+2x-y-20 \\ &= y^2+(5x-1)y+2(3x^2+x-10) \\ &= y^2+(5x-1)y+2(3x-5)(x+2) \\ &= \{y+2(x+2)\}\{y+(3x-5)\} \\ &= (\underline{\underline{2}}x+y+\underline{\underline{4}})(\underline{\underline{3}}x+y-\underline{\underline{5}}) \end{aligned}$$ ……ア，イ，ウ，エ

となる。

$$x=-1,\ y=\frac{2}{3-\sqrt{7}}=\frac{2\left(3+\sqrt{7}\right)}{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)}=3+\sqrt{7}$$

のとき

$$2x+y+4=-2+\left(3+\sqrt{7}\right)+4=5+\sqrt{7}$$

$$3x+y-5=-3+\left(3+\sqrt{7}\right)-5=-\left(5-\sqrt{7}\right)$$

であるから，A の値は

$$-\left(5+\sqrt{7}\right)\left(5-\sqrt{7}\right)=-(25-7)=\underline{\underline{-18}}$$ ……オカキ

である。

〔2〕

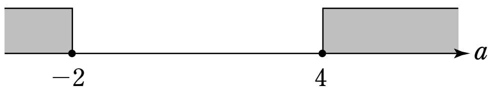
(1)　条件 p の 2 次不等式を解くと，

$$a^2 \geqq 2a + 8$$
$$a^2 - 2a - 8 \geqq 0$$
$$(a-4)(a+2) \geqq 0$$

よって，$a \leqq -2$，または　$a \geqq 4$ となり，これは条件 q と一致する。

ゆえに，q は p であるための必要十分条件である。(……⓪)　　　　……ク

(2)　条件 p を満たす a の値の範囲を図示すると，以下の網目部分のようになる。



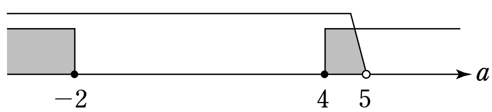
ここで，

$q : a \leqq -2$　または　$a \geqq 4$　より　$\overline{q} : -2 < a < 4$

$r : a \geqq 5$　より　$\overline{r} : a < 5$

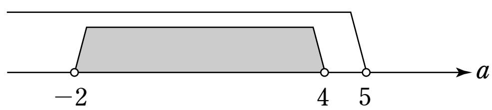
⓪～③の条件を満たす a の値の範囲を図示すると，以下の網目部分のようになる。

⓪ : q かつ $\overline{r}$

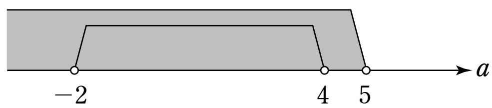


① : q または $\overline{r}$

② : $\overline{q}$ かつ $\overline{r}$



③ : $\overline{q}$ または $\overline{r}$



条件 p を満たす，すべての a の値に対して成り立つ条件は①であるから，

命題「p ならば q または $\overline{r}$」は真である。(……①)　　　　……ケ

また，⓪～③それぞれの条件を満たす，すべての a の値に対して条件 p が成り立つものは⓪であるから，

命題「q かつ $\overline{r}$ ならば p」は真である。(……⓪)　　　　……コ

第 2 問

$y=2x^2-4(a+1)x+10a+1$　……①

を平方完成すると

$$\begin{aligned} y&=2\{x^2-2(a+1)x\}+10a+1\\ &=2[\{x-(a+1)\}^2-(a+1)^2]+10a+1\\ &=2\{x-(a+1)\}^2-2(a+1)^2+10a+1\\ &=2\{x-(a+1)\}^2-2a^2+6a-1 \end{aligned}$$

となるから，グラフ G の頂点の座標は

$(a+\underline{\underline{1}},\ \underline{\underline{-2}}a^2+\underline{\underline{6}}a-\underline{\underline{1}})$　……**ア～オ**

(1)　グラフ G が x 軸と接するとき，頂点の y 座標は 0 であるから，

$-2a^2+6a-1=0$

$2a^2-6a+1=0$

よって，$a=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\cdot 1}}{2}=\underline{\underline{\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{2}}}$　……**カ，キ，ク**

のときである。

(2)　関数①において，$-1\leqq x\leqq 3$ における最小値 m がグラフ G の頂点の y 座標であるのは，

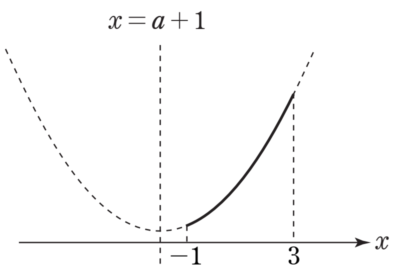
G の軸　$x=a+1$ が $-1\leqq a+1\leqq 3$

すなわち　$\underline{\underline{-2}}\leqq a\leqq\underline{\underline{2}}$ のときである。　……**ケコ，サ**

また $a<-2$ のとき，$a+1<-1$ であるから，2 次関数①は $x=-1$ のとき最小となる。

よって，このとき　$m=2+4(a+1)+10a+1$

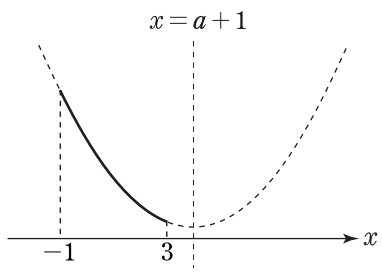
$=\underline{\underline{14}}a+\underline{\underline{7}}$　……**シス，セ**



さらに $a>2$ のとき，$a+1>3$ であるから 2 次関数①は $x=3$ のとき最小となる。

よって，このとき　$m=18-12(a+1)+10a+1$

$=\underline{\underline{-2}}a+\underline{\underline{7}}$　……**ソタ，チ**



以上をまとめると

$a<-2$ のとき $m=14a+7$ ……④

$-2\leqq a\leqq 2$ のとき $m=-2a^2+6a-1$ ……⑤

$a>2$ のとき $m=-2a+7$ ……⑥

となる。ここで $m=\dfrac{7}{9}$ とすると

④のとき　$\dfrac{7}{9}=14a+7$

$14a=-\dfrac{56}{9}$　よって　$a=-\dfrac{4}{9}$

これは $a<-2$ に反するから不適。

⑤のとき　$-2a^2+6a-1=\dfrac{7}{9}$

$18a^2-54a+16=0$

$9a^2-27a+8=0$

$(3a-8)(3a-1)=0$

よって，$a=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{8}{3}$ となるが，$a=\dfrac{8}{3}$ は $-2\leqq a\leqq 2$ に反する。

よって，$a=\dfrac{1}{3}$

⑥のとき　$\dfrac{7}{9}=-2a+7$

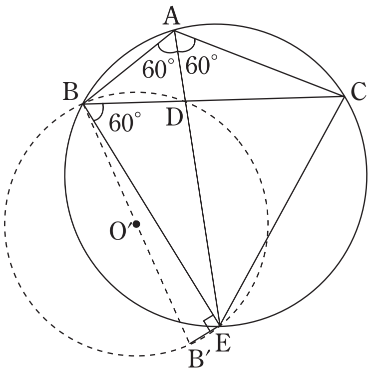
$2a=7-\dfrac{7}{9}=\dfrac{56}{9}$

よって，$a=\dfrac{28}{9}$　（これは $a>2$ を満たす）

したがって，$m=\dfrac{7}{9}$ になるのは　$a=\dfrac{1}{\underline{\underline{3}}}$，$\dfrac{28}{\underline{\underline{9}}}$ ……**ツ～ニ**

のときである。

第 3 問



$\triangle$ABC に余弦定理を用いると

$$\cos\angle \mathrm{CAB} = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$$

$$= \frac{1^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{2\cdot 1\cdot 2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$0^\circ < \angle\mathrm{CAB} < 180^\circ$ より

$\angle\mathrm{CAB} = \underline{\underline{120^\circ}}$ ……**アイウ**

また，角の二等分線の性質から

$\mathrm{BD} : \mathrm{CD} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 1 : 2$

よって　$\mathrm{BD} = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}}$，$\mathrm{CD} = \underline{\underline{\dfrac{2\sqrt{7}}{3}}}$ ……**エ～ク**

次に $\angle\mathrm{DAC} = \angle\mathrm{DAB} = 60^\circ$ であり，

$\angle\mathrm{DBE} = \angle\mathrm{DAC} = 60^\circ$（弧 CE に対する円周角）

また，円に内接する四角形の対角の和は 180° であるから

$\angle\mathrm{BEC} = 60^\circ$

よって，$\angle\mathrm{DAB} = \angle\mathrm{BEC} = 60^\circ$

以上から，$\angle\mathrm{DAB}$ と等しい角は $\angle\mathrm{DBE}$（……$\underline{\underline{⓪}}$）と $\angle\mathrm{BEC}$（……$\underline{\underline{④}}$）である。 ……**ケ，コ**

$\angle\mathrm{CBE} = \angle\mathrm{BEC} = 60^\circ$ より $\triangle$BEC は正三角形であるから

$\mathrm{BE} = \mathrm{BC} = \underline{\underline{\sqrt{7}}}$　である。 ……**サ**

また，$\triangle\mathrm{BED} \backsim \triangle\mathrm{ACD}$（二角相等）より

$\mathrm{DE} : \mathrm{DC} = \mathrm{BE} : \mathrm{AC}$

よって　$\mathrm{DE} : \dfrac{2}{3}\sqrt{7} = \sqrt{7} : 2$

$2\mathrm{DE} = \dfrac{14}{3}$

すなわち $\mathrm{DE} = \dfrac{7}{\underline{\underline{3}}}$　である。 ……**シ，ス**

次に $\triangle$BED の外接円の半径を R とし，$\triangle$BED で正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{DE}}{\sin 60^\circ}=2R$$

$$R=\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{3\sqrt{3}}$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{9}$$

$\mathrm{O'B}=R$ だから　$\mathrm{O'B}=\underline{\underline{\dfrac{7\sqrt{3}}{9}}}$　……**セ，ソ，タ**

円 $\mathrm{O'}$ に直径 $\mathrm{BB'}$ を引くと，$\triangle\mathrm{BB'E}$ は直角三角形だから

$$\mathrm{B'E}^2=\mathrm{BB'}^2-\mathrm{BE}^2$$

$$\mathrm{B'E}^2=\left(\frac{14\sqrt{3}}{9}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$=\frac{196\cdot 3}{81}-\frac{81\cdot 7}{81}$$

$$=\frac{588-567}{81}=\frac{21}{81}=\frac{7}{27}$$

$$\mathrm{B'E}=\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$$

よって　$\tan\angle\mathrm{EBO'}=\dfrac{\mathrm{B'E}}{\mathrm{BE}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}}{\sqrt{7}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{9}}}$　……**チ，ツ**

第4問

(1)　以下，1回目で出た目から順に(1回目の目，2回目の目，……)のように表す。

1の目が出て終了するには，その前までの目の数の和が3であればよいので，

(3)，(1，2)，(2，1)，(1，1，1)の　$\underline{\underline{4}}$通りである。 ……**ア**

2の目が出て終了するには，その前までの目の数の和が3または2であればよいので，

(3)，(1，2)，(2，1)，(1，1，1)，(2)，(1，1)の　$\underline{\underline{6}}$通りである。 ……**イ**

3の目が出て終了するには，その前までの目の数の和が3または2または1であればよいので，(3)，(1，2)，(2，1)，(1，1，1)，(2)，(1，1)，(1)の　$\underline{\underline{7}}$通りである。

……**ウ**

4の目が出て終了するには，その前までの目の数の和が3または2または1か最初に4が出ればよいので，$\underline{\underline{8}}$通りである。 ……**エ**

(2)　投げる回数が1回で終了するのは，1回目で4，5，6の目が出る場合であるから，その確率は　$\dfrac{3}{6}=\underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$ ……**オ，カ**

である。

投げる回数が2回で終了するのは，1回目で，1，2，3のいずれかの目が出て，2回目で，目の数の和が4以上となる場合である。

1回目に1の目が出た場合，(1，3)，(1，4)，(1，5)，(1，6)の　4通り

1回目に2の目が出た場合，(2，2)，(2，3)，(2，4)，(2，5)，(2，6)の　5通り

1回目に3の目が出た場合，(3，1)，(3，2)，(3，3)，(3，4)，(3，5)，(3，6)の　6通り

すなわち，1回目が1，2，3のいずれかの場合，15通りであるから，

$$\frac{4+5+6}{6^2}=\frac{15}{36}=\frac{5}{\underline{\underline{12}}}$$ ……**キ，クケ**

終了するまでに投げる回数が最も多くなるのは，3回目まで1の目が出て，$\underline{\underline{4}}$回で終了する場合であり， ……**コ**

その確率は3回目まで1の目が出続けて，4回目は何の目が出てもよいので，

$$\frac{1}{6^3}=\frac{1}{\underline{\underline{216}}}$$ ……**サ，シスセ**

である。

ここで投げる回数が3回で終了する確率は，余事象の確率より，

$$1-\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{1回}+\underbrace{\frac{5}{12}}_{2回}+\underbrace{\frac{1}{216}}_{4回}\right)=\frac{17}{216}$$

よって，終了するまでに投げる回数の期待値は，

$$1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{17}{216}+4\times\frac{1}{216}$$

$$=\frac{1}{216}(108+180+51+4)$$

$$=\frac{343}{\underline{\underline{216}}}$$ ……**ツ～ト**

である。