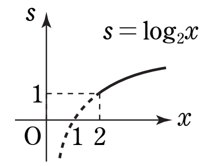
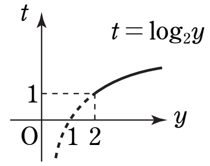
2009 年度大学入試センター試験　解説〈数学ⅡB〉

第１問

〔１〕　$x \geqq 2$　より　$s = \log_2 x \geqq \underline{\underline{1}}$　……ア

　　　$y \geqq 2$　より　$t = \log_2 y \geqq \underline{\underline{1}}$





$8 \leqq xy \leqq 16$ より　$\log_2 8 \leqq \log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y \leqq \log_2 16$

すなわち，　　$\underline{\underline{3}} \leqq s + t \leqq \underline{\underline{4}}$　$(\Longleftrightarrow -s+3 \leqq t \leqq -s+4)$　……イ，ウ

また　$z = \log_2 \sqrt{x} + \log_2 y = \dfrac{1}{2}\log_2 x + \log_2 y$

$$= \frac{1}{\underline{\underline{2}}} s + t$$　……エ，オ

が成り立つ。

よって

$$\begin{cases} \text{直線}\quad t = -\dfrac{1}{2}s + z \quad \cdots\cdots \text{①} \\ s \geqq 1,\ t \geqq 1,\ -s+3 \leqq t \leqq -s+4 \text{ が表す領域（下図網目部分）} \end{cases}$$

の共有点存在条件より

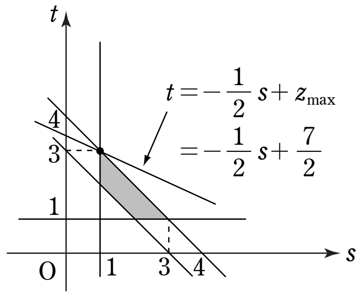
　直線①が点 (1，3) を通るとき

すなわち，

　　$s = \underline{\underline{1}}$，$t = \underline{\underline{3}}$ のとき　……カ，キ

$$\left(z = \frac{1}{2}s + t \text{ の最大値} \right) = \frac{1}{2} \times 1 + 3$$

$$= \frac{7}{\underline{\underline{2}}}$$　……ク，ケ



このとき　$\log_2 x = 1$　より　$x = \underline{\underline{2}}$　……コ

　　　　　$\log_2 y = 3$　より　$y = 2^3 = \underline{\underline{8}}$　……サ

である。

〔2〕　$0 \leqq \theta < 2\pi$

$5\sin\theta - 3\cos 2\theta = 3$　……(＊)

2 倍角の公式で
$\sin\theta$ のみに統一!!

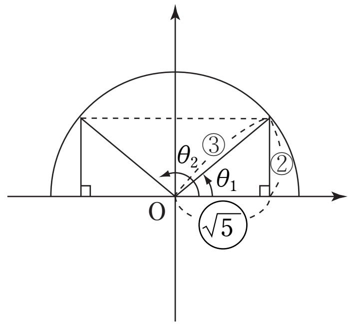
$5\sin\theta - 3(1 - 2\sin^2\theta) = 3$

よって，$\underline{\underline{6}}\sin^2\theta + 5\sin\theta - \underline{\underline{6}} = 0$　……シ，ス

$(2\sin\theta + 3)(3\sin\theta - 2) = 0$

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$　より

$$\sin\theta = \frac{2}{\underline{\underline{3}}}$$　……セ，ソ



よって　$0 \leqq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ とすると，右図より

$$\cos\theta_1 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{3}}},\ \cos\theta_2 = -\underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{3}}}$$　……タ，チ

である。

また　$\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{\sqrt{5}}{3} < \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　より

$$\cos\frac{\pi}{4} < \cos\theta_1 < \cos\frac{\pi}{5}$$

よって　$\dfrac{\pi}{5} < \theta_1 < \dfrac{\pi}{4}$　(……$\underline{\underline{③}}$)　……①　……ツ

が成り立つ。

ここで，①より　$\dfrac{n}{5}\pi < n\theta_1 < \dfrac{n}{4}\pi$

また　$\theta_1 + \theta_2 = \pi$　より　$\dfrac{3}{4}\pi < \theta_2 = \pi - \theta_1 < \dfrac{4}{5}\pi$

よって　$n\theta_1 > \theta_2$ が成り立つのは

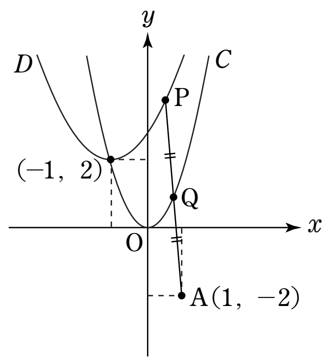
$$\frac{4}{5}\pi \leqq \frac{n}{5}\pi$$

すなわち　$n \geqq 4$　のときである。

よってこれを満たす最小の自然数 $n = \underline{\underline{4}}$　……テ

である。

第 2 問



$C : y = 2x^2$　……①

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ に関して点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$ と対称であるから，

$$\begin{cases} u = \underline{\underline{\dfrac{x+1}{2}}} & \text{……ア，イ} \\ v = \underline{\underline{\dfrac{y-2}{2}}} & \text{……ウ，エ} \end{cases} \quad \text{……②}$$

Q が C 上を動くとき①より　$v = 2u^2$　……③

が成り立つので

②，③より

$$\frac{y-2}{2} = 2\times\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$$

よって　$D : y = (x+1)^2 + 2 = x^2 + \underline{\underline{2}}x + \underline{\underline{3}}$　……④　　……オ，カ

①，④より　$2x^2 = x^2 + 2x + 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

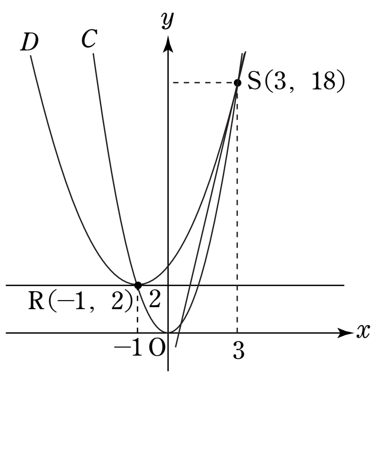
$(x+1)(x-3) = 0$

$x = -1,\ 3$

よって　放物線 C と D の交点の x 座標はそれぞれ　$\underline{\underline{-1}},\ \underline{\underline{3}}$　……キク，ケ

である。

また　④より　$y' = 2x + 2$



したがって点 $\mathrm{R}(-1,\ 2)$ における D の接線は

$y - 2 = 0\cdot(x+1)$

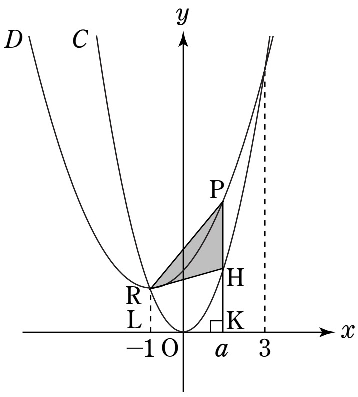
$y = \underline{\underline{2}}$　……コ

点 $\mathrm{S}(3,\ 18)$ における D の接線は

$y - 18 = 8(x-3)$

$y = \underline{\underline{8}}x - \underline{\underline{6}}$　……サ，シ

点 $(t,\ f(t))$ における
$y = f(t)$ の接線は
$y - f(t) = f'(t)(x - t)$



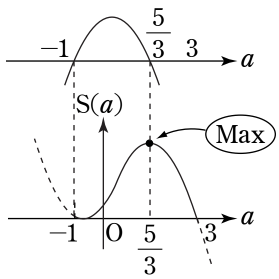
点P，Rから x 軸に下ろした垂線の足をそれぞれK，Lとすると

$$S(a)=\frac{1}{2}\underbrace{\mathrm{PH}}_{\text{底辺}}\cdot\underbrace{\mathrm{KL}}_{\text{高さ}}=\frac{1}{2}\{(a^2+2a+3)-2a^2\}\cdot\{a-(-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(-a^2+2a+3)(a+1)$$

$$=\frac{1}{2}(-a^3+a^2+5a+3)$$ ……ス～タ

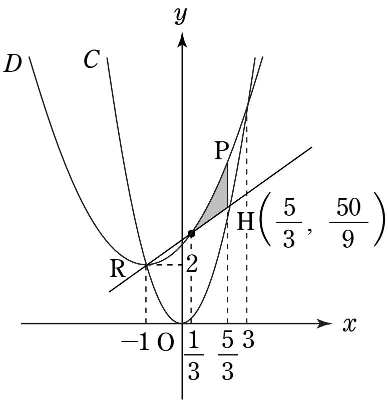
これより



$$S'(a)=\frac{1}{2}(-3a^2+2a+5)$$

$$=-\frac{1}{2}(3a-5)(a+1)$$

よって　$a=\frac{5}{3}$ のとき　$S(a)$ は最大値をとる。　……チ，ツ



$$\mathrm{HR}：y-2=\frac{\frac{50}{9}-2}{\frac{5}{3}+1}(x+1)$$

$$=\frac{4}{3}(x+1)$$

$$y=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$$ ……⑤

④，⑤より

$$x^2+2x+3=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$$

$$3x^2+2x-1=0$$

$$(x+1)(3x-1)=0$$

$$x=-1,\ \frac{1}{3}$$

$x\neq-1$ より

$$x=\frac{1}{3}$$ ……テ，ト

さらに $\frac{1}{3}\leqq x\leqq\frac{5}{3}$ の範囲で放物線 D，直線PH，直線HRで囲まれた図形の面積を T とすると

$$T=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{(x^2+2x+3)-\left(\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}\right)\right\}dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{125}{27}-\frac{1}{27}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{25}{9}-\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\underline{\underline{\frac{160}{81}}}$$ ……ナ～ノ

（注）

$$T=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}(x+1)\left(x-\frac{1}{3}\right)dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left(x-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)dx$$

$$=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{5}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$=\underline{\underline{\frac{160}{81}}}$$ ……ナ～ノ

としてもよい。

第 3 問

$\{a_n\}$ ： $a_n = 1\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
a_1, & \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} & a_2, & \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} & a_3, & \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} & a_4, & \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} & a_5, & \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} & a_6, & \xrightarrow{\times\frac{1}{3}} \cdots\cdots \\
 & & \| & & & & \| & & & & \| & \\
 & & b_1 & & \xrightarrow{\times\frac{1}{9}} & & b_2 & & \xrightarrow{\times\frac{1}{9}} & & b_3 & \xrightarrow{\times\frac{1}{9}}
\end{array}
$$

(1)　等比数列 $\{b_n\}$ の 初項は　$b_1 = a_2 = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}$　……**ア，イ**

公比は　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\dfrac{1}{9}}}$　……**ウ，エ**

したがって　公比 $\dfrac{1}{9} \neq 1$ より

$$T_n = \frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{9}} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}\left(1-\underline{\underline{\frac{1}{9^n}}}\right)$$　……**オ〜ク**

また　$b_k = \dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{k-1} = \dfrac{1}{3\cdot 3^{2k-2}} = \dfrac{1}{3^{2k-1}}$　より

$$
\begin{aligned}
b_1 b_2 \cdots b_n &= \frac{1}{3\cdot 3^3\cdot 3^5 \cdots\cdots 3^{2n-1}} \\
&= \frac{1}{3^{1+3+5+\cdots+(2n-1)}} \\
&= \frac{1}{3^{\frac{n(1+2n-1)}{2}}}
\end{aligned}
$$

〰〰 は 初項 1，末項 $2n-1$，$\boxed{\text{項数}n}$ の等差数列の和より

〰〰 $= \dfrac{\boxed{}\cdot(\bigcirc + \cdots)}{2}$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3^{n^2}}}}$$　……**ケ，コ**

（2）　$c_n=2n\cdot b_n$ とおくと

$$c_{n+1}=2(n+1)b_{n+1}=2(n+1)\cdot\frac{1}{9}b_n$$

$$=\frac{1}{9}\cdot 2n\cdot b_n+\frac{2}{9}b_n$$

$$=\frac{1}{9}\cdot c_n+\frac{2}{9}b_n\qquad（ただし\ c_n=2n\cdot b_n）$$

よって　$\underline{\underline{9}}c_{n+1}-c_n=\underline{\underline{2}}b_n$　……サ，シ

$\{c_n\}$ が満たす漸化式を作った！

（別）　$Ac_{n+1}-c_n=Bb_n$（A，B は定数）とおくと

$c_n=2nb_n$　より　$c_{n+1}=2(n+1)b_{n+1}=2(n+1)\cdot\dfrac{1}{9}b_n$

よって

$$A\cdot\frac{2}{9}(n+1)b_n-2nb_n=Bb_n$$

両辺を $b_n(\neq 0)$ で割ると

$$\frac{2}{9}A(n+1)-2n=B$$

$$(2A-18)n+2A-9B=0$$

これがすべての n について成り立つことから

◯$n+$△$=0$ が n の恒等式 $\Longleftrightarrow$ ◯$=$△$=0$

$$\begin{cases}2A-18=0\\2A-9B=0\end{cases}$$

これから　$A=9$，$B=2$

したがって　$9c_{n+1}-c_n=2b_n$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}(9c_{k+1}-c_k)=\sum_{k=1}^{n}2b_k=2\sum_{k=1}^{n}b_k=2T_n\quad\cdots\cdots①$$

である。

ここで

$$\sum_{k=1}^{n}(9c_{k+1}-c_k)=9\underbrace{\sum_{k=1}^{n}c_{k+1}}_{c_2+c_3+\cdots\cdots+c_n+c_{n+1}}-\sum_{k=1}^{n}c_k=9\left(\sum_{k=1}^{n}c_k+c_{n+1}-c_1\right)-\sum_{k=1}^{n}c_k$$

$$=8\sum_{k=1}^{n}c_k+9c_{n+1}-9c_1$$

$$=\underline{\underline{8}}U_n+\underline{\underline{9}}c_{n+1}-\underline{\underline{9}}c_1\quad\cdots\cdots②$$

……ス～ソ

①，②より

$$2T_n = 8U_n + 9c_{n+1} - 9c_1$$

よって　$U_n = \dfrac{1}{8}(2T_n - 9c_{n+1} + 9c_1)$

$$= \frac{1}{8}\left\{\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{9^n}\right) - 9\cdot\frac{2(n+1)}{3^{2n+1}} + 9\cdot\frac{2}{3}\right\}$$

$$\left(\text{ただし}\quad T_n = \frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right),\ c_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3^{2(n+1)-1}},\ c_1 = 2b_1 = \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\frac{3}{4} - \frac{3}{4\cdot 3^{2n}} - \frac{2(n+1)}{3^{2n-1}} + 6\right\}$$

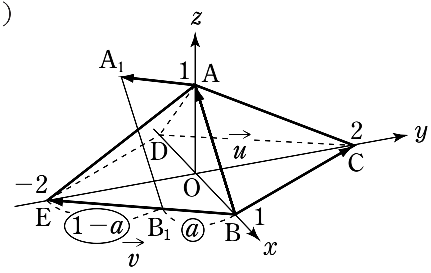
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{27}{4} - \frac{24n+27}{4\cdot 9^n}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{27}{32}}} - \underline{\underline{\frac{24n+27}{32}}}\cdot\underline{\underline{\frac{1}{9^n}}}$$

……**タ～テ，ト～ネ**

第4問

(1)



$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$ ← 始点をOにそろえる

$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OB}|^2$

$=0-0-0+1$

（ただし $OC\perp OA$，$OC\perp OB$，$OB\perp OA$）

$=\underline{\underline{1}}$ ……ア

であり

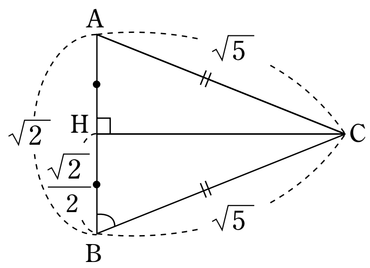
$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2\,|\overrightarrow{BA}|^2-(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2\times(\sqrt{2})^2-1^2}$

（ただし $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=1$）

$=\underline{\underline{\dfrac{3}{2}}}$ ……イ，ウ

（別） 右図で点Cから辺ABに下ろした垂線の足をHとすると



$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{BA}|\cos\angle ABC$

$=BC\cdot BA\cdot\dfrac{BH}{BC}=BA\cdot BH$

$=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\underline{\underline{1}}$ ……ア

であり

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot BA\cdot CH=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\underline{\underline{\dfrac{3}{2}}}$ ……イ，ウ

(2)　$\overrightarrow{BB_1}=a\overrightarrow{BE}=a\vec{v}$　……エ

点 P が A_1B_1 上：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1P}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BB_1})+b\overrightarrow{B_1A_1}$

$=\overrightarrow{OB}+a\overrightarrow{BE}+b\overrightarrow{BA}$

$=\overrightarrow{OB}+b\vec{u}+a\vec{v}$　……①

また

点 Q が AE 上：$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OE}+c\overrightarrow{EA}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE})+c(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BE})$

$=\overrightarrow{OB}+\vec{v}+c(\vec{u}-\vec{v})$

$=\overrightarrow{OB}+c\vec{u}+(1-c)\vec{v}$　……②　……オ，カ

（ただし，$\vec{u}=\overrightarrow{BA}$，$\vec{v}=\overrightarrow{BE}$）

B 始点にそろえた
2 通りを係数比較!

P と Q が一致するとき　$\vec{u}\neq\vec{0}$，$\vec{v}\neq\vec{0}$，$\vec{u}\not\parallel\vec{v}$　であるから

①，②より　u，v の係数を比較して

$b=c$，$a=1-c$　より

$b=c=-a+1$　……キ〜ケ

このとき　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+(1-a)\vec{u}+a\vec{v}$

とかける。

よって　点 E_1（$=P=Q$）は AE を $a:1-a$ に内分する。　……コ

同様にして　a'，b'　（$0<a'<1$，$0<b'<1$）を用いると

点 R が A_1C_1 上：$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{C_1R}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BB_1})+b'\overrightarrow{C_1A_1}$

$=\overrightarrow{OC}+a\overrightarrow{BE}+b'\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{OC}+a\overrightarrow{CD}+b'\overrightarrow{CA}$

C 始点にそろえた
2 通りを係数比較!

点 S が AD 上：$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DS}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD})+a'\overrightarrow{DA}$

$=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}+a'(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$

$=\overrightarrow{OC}+(1-a')\overrightarrow{CD}+a'\overrightarrow{CA}$

とかける。

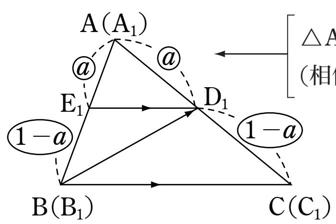
よって　2 点 R，S が一致するとき $\overrightarrow{CD}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{CA}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{CD}\not\parallel\overrightarrow{CA}$ であるから $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CA}$ の係数を比較して

$a=1-a'$，$b'=a'$

であるから　$a'=1-a$

したがって

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+a\overrightarrow{CD}+(1-a)\overrightarrow{CA}$



$\triangle AE_1D_1 \backsim \triangle AB_1C_1$
（相似比 $a:1$）

となり

点 D_1（$=R=S$）も DA を $a:1-a$ に内分する。
……サ

よって　$\overrightarrow{D_1E_1}=a\overrightarrow{DE}$　……シ

が成り立つ。

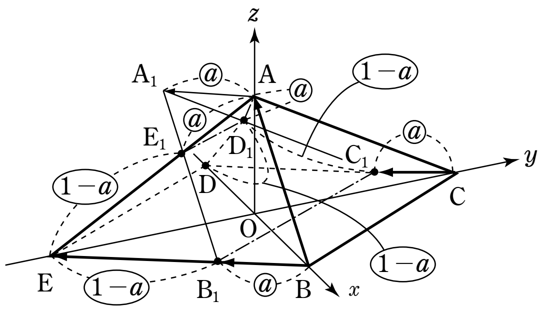
さらに $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle ABC$ と $\triangle A_1E_1D_1 \backsim \triangle AED$（相似比 $a:1$）に注意すると

$\triangle A_1B_1C_1$ は $\triangle ABC$ を A_1A だけ平行移動したものである。（左下図）

$$\begin{aligned}\square B_1C_1D_1E_1 &= \triangle A_1B_1C_1 - \triangle A_1E_1D_1 \\ &= \left\{1-\left(\frac{a}{1}\right)^2\right\}\cdot \triangle A_1B_1C_1 \\ &= (1-a^2)\cdot \triangle ABC \\ &= (1-a^2)\cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2}(1-a^2)\end{aligned}$$

……ス～チ

である。



また，
$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right|^2 &= \left|(1-a)\overrightarrow{BA}+a\overrightarrow{BC}\right|^2 \\ &= (1-a)^2\left|\overrightarrow{BA}\right|^2 + 2a(1-a)\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} + a^2\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 \\ &= (1-a)^2\times 2 + 2a(1-a)\times 1 + a^2\times 5\end{aligned}$$

（ただし　$\left|\overrightarrow{BA}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1$）

$$= 5a^2-2a+2$$

よって　$\left|\overrightarrow{B_1D_1}\right| = \sqrt{5a^2-2a+2}$　……ツ～ト

である。