2010 年度大学入試センター試験　解説〈数学ⅠA〉

第１問

〔１〕

α の分母を有理化すると，

$$\alpha=\frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)}=\frac{7-2\sqrt{21}+3}{7-3}$$

$$=\frac{10-2\sqrt{21}}{4}$$

$$=\underline{\underline{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}}$$

……ア，イウ，エ

次に，$6x^2-7x+1=0$ の左辺を因数分解すると，

$$6x^2-7x+1=(6x-1)(x-1)$$

であるから

$$(6x-1)(x-1)=0$$

よって，

$$x=\underline{\underline{\frac{1}{6}}},\ \underline{\underline{1}}$$

……オ，カ，キ

以上から

⓪ $\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}$　① $\dfrac{2}{5-\sqrt{21}}$　② $\dfrac{1}{6}$　③ 1

ここで，①の分母を有理化すると，

$$\frac{2\left(5+\sqrt{21}\right)}{25-21}=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

であるから，⓪＜①　かつ　②＜③は明らかで，⓪と②のどちらかが最小になる。

よって，

$$\frac{5-\sqrt{21}}{2}-\frac{1}{6}=\frac{15-3\sqrt{21}-1}{6}$$

$$=\frac{14-3\sqrt{21}}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{196}-\sqrt{189}}{6}>0$$

より②＜⓪であるから，⓪～③のうち最も小さいものは$\underline{\underline{②}}$である。　……ク

〔2〕

条件 p を満たす自然数 n は，0 以上の整数 m を用いて

$n=5m+1$　……①

と表せる。この自然数 n がさらに条件 r を満たすとき，$5m$ は偶数，すなわち m は偶数であるから，m は 0 以上の整数 m' を用いて

$m=2m'$　……②

と表せる。すなわち，条件「p かつ r」を満たす自然数 n は，

$n=5\cdot 2m'+1=10m'+1$

と表せ，条件 q を満たすので「p かつ r」$\Longrightarrow q$ は真である。

また，条件 q を満たす自然数 n は，0 以上の整数 m' を用いて

$n=10m'+1$

と表せ，条件「p かつ r」を満たすので $q\Longrightarrow$「p かつ r」は真である。

以上より，

「p かつ r」は q であるための必要十分条件である。(……⓪)　……ケ

ここで，条件 $\overline{r}$ を満たす自然数 n は偶数であり，条件 $\overline{s}$ を満たす自然数 n は 1 または 2 または合成数である。

よって，$\overline{r}\Longrightarrow\overline{s}$ は真，$\overline{s}\Longrightarrow\overline{r}$ は偽であるから，

$\overline{r}$ は $\overline{s}$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない。(……②)　……コ

条件 s を満たす自然数 n は 3 以上の素数で奇数であるから，

条件「p かつ s」を満たす自然数は①，②より

$n=10m'+1$　(ただし，m'は 1 以上の整数)，n は素数

と表せる。

この自然数 n は，条件「q かつ s」を満たすので，「p かつ s」$\Longrightarrow$「q かつ s」は真である。

また，条件「q かつ s」を満たす自然数は，1 以上の整数 m' を用いて

$n=10m'+1=5\cdot 2m'+1$，n は素数

と表せるので，条件「p かつ s」を満たし，「q かつ s」$\Longrightarrow$「p かつ s」は真である。

以上より，

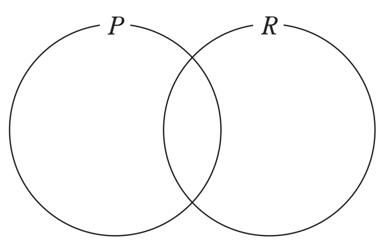
「p かつ s」は「q かつ s」であるための必要十分条件である。(……⓪)　……サ

条件 p を満たす自然数 n は，①より

$n=5m+1$

と表せ，m が奇数のとき n は偶数，m が偶数のとき n は奇数である。

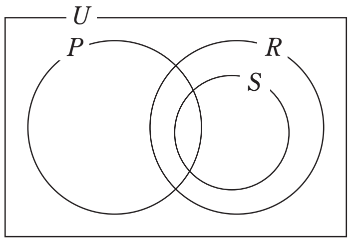
したがって，P，R の関係を表す図は次のようになる。



次に，条件 s を満たす自然数 n は，3 以上の素数で奇数であるから R に含まれるが，P には含まれる場合と含まれない場合がある。

　（$n=11$ のとき $n \in P$，$n=3$ のとき $n \notin P$）

以上より，P，R，S の関係を表す図は，⑤である。　……シ



第２問

②の右辺を平方完成すると

$$y=(x+a)^2-a^2+b$$

となるから，G_2 の頂点の座標は$(-a,\ -a^2+b)$

この頂点が G_1 上にあるから，

$$-a^2+b=3(-a)^2-2(-a)-1$$

$$b=\underline{\underline{4}}a^2+\underline{\underline{2}}a-\underline{\underline{1}}$$ ……ア，イ，ウ

よって G_2 の頂点の座標を a を用いて表すと

$$(-a,\ -a^2+4a^2+2a-1)$$

すなわち

$$(-a,\ \underline{\underline{3}}a^2+2a-\underline{\underline{1}})$$ ……エ，オ

(1)　G_2 の頂点の y 座標を Y とおくと

$$Y=3a^2+2a-1=3\left(a+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$$

と表されるから，

$a=\underline{\underline{\dfrac{-1}{3}}}$ のとき，最小値 $\underline{\underline{\dfrac{-4}{3}}}$ をとる。……カ～サ

また，$a=\underline{\underline{\dfrac{-1}{3}}}$ のとき，G_2 の軸は

直線 $x=-a=-\dfrac{-1}{3}=\underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}$ ……シ，ス

であり，G_2 と x 軸との交点の x 座標は

$$y=x^2-\frac{2}{3}x+4\left(\frac{-1}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)-1$$

$$=x^2-\frac{2}{3}x-\frac{11}{9}$$

より，

$$x^2-\frac{2}{3}x-\frac{11}{9}=0$$

$$9x^2-6x-11=0$$

であるから，

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-9\cdot(-11)}}{9}=\underline{\underline{\frac{1\pm2\sqrt{3}}{3}}}$$ ……セ～チ

(2)　G_2 が点$(0,\ 5)$と通ることから，$b=5$

よって，

$$4a^2+2a-1=5$$

$$2a^2+a-3=0$$

$$(a-1)(2a+3)=0$$

したがって，$a=\underline{\underline{1}}$，$\underline{\underline{\dfrac{-3}{2}}}$ ……ツ～ナ

ここで，$a=1$ のとき

$G_2 : y=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$

となるが，これを x 軸，y 軸方向に p だけ平行移動すると，頂点は $(-1+p,\ 4+p)$ であり，これが G_1 上にあるから

$4+p=3(-1+p)^2-2(-1+p)-1$

$4+p=3-6p+3p^2+2-2p-1$

$3p^2-9p=0$

$3p(p-3)=0$

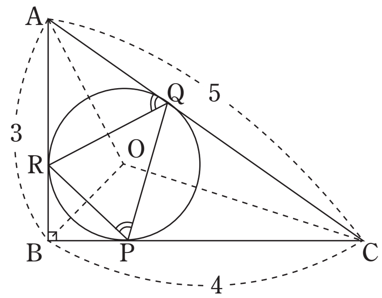
$p=0,\ 3$

よって，$p \neq 0$ より

$p=3$

すなわち，G_2 を x 軸方向に $\underline{\underline{3}}$，$y$ 軸方向にも同じく 3 だけ平行移動しても頂点は G_1 上にある。 ……ニ

第 3 問



(1)　△ABC の内接円の半径を r とすると，△ABC の面積は

$$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

であるから，

$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = \frac{1}{2}\cdot 3r + \frac{1}{2}\cdot 4r + \frac{1}{2}\cdot 5r$$

よって，

$$OP = OR = r = \underline{\underline{1}}$$ ……ア

また，△AQR に余弦定理を用いると，$\cos\angle QAR = \cos\angle CAB = \dfrac{3}{5}$ であるから，

$$\begin{aligned} QR^2 &= AQ^2 + AR^2 - 2AQ\cdot AR\cos\angle QAR \\ &= 2^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$

よって，

$$QR = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{5}}{5}}}$$ ……イ，ウ，エ

である。

△PQR に正弦定理を用いると，

$$\frac{QR}{\sin\angle QPR} = 2OP = 2$$

であるから，

$$\sin\angle QPR = \frac{1}{2}QR = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$$ ……オ，カ，キ

（オ，カ，キの別解）

円の接線と弦のつくる角の定理 (接弦定理) より，

$$\angle QPR = \angle AQR$$

であるから，△AQR に余弦定理を用いると，

$$\begin{aligned} \cos\angle QPR &= \cos\angle AQR \\ &= \frac{AQ^2 + QR^2 - AR^2}{2AQ\cdot QR} \end{aligned}$$

$$=\frac{2^2+\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2-2^2}{2\cdot 2\cdot \dfrac{4\sqrt{5}}{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

よって，$\sin\angle\mathrm{QPR}>0$ より

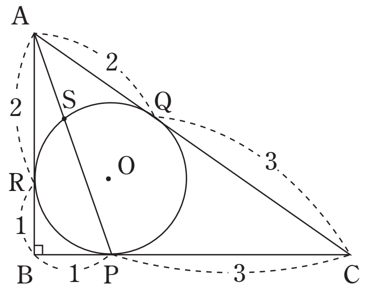
$$\sin\angle\mathrm{QPR}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{QPR}}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\underline{\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$$ ……**オ，カ，キ**

である。

(2)



$\triangle\mathrm{ABP}$ に三平方の定理を用いると，

$$\mathrm{AP}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BP}^2=3^2+1^2=10$$

よって，

$$\mathrm{AP}=\underline{\underline{\sqrt{10}}}$$ ……**クケ**

また，方べきの定理より

$$\mathrm{AS}\cdot\mathrm{AP}=\mathrm{AR}^2$$

であるから，

$$\mathrm{AS}\cdot\sqrt{10}=2^2$$

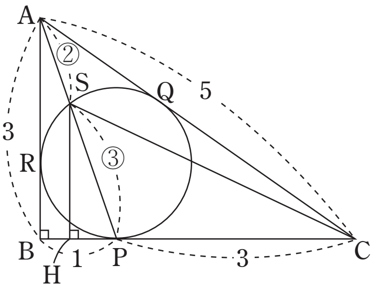
すなわち

$$\mathrm{AS}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

ゆえに，

$$\mathrm{SP}=\mathrm{AP}-\mathrm{AS}=\sqrt{10}-\frac{2\sqrt{10}}{5}=\underline{\underline{\frac{3\sqrt{10}}{5}}}$$ ……**コ～ス**

である。



ここで，SH//AB より

$$\mathrm{HP}:\mathrm{BP}=\mathrm{SP}:\mathrm{AP}$$

$$\mathrm{HP}=\frac{\mathrm{BP}\cdot\mathrm{SP}}{\mathrm{AP}}=\frac{1\cdot\frac{3\sqrt{10}}{5}}{\sqrt{10}}=\underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$ ……セ，ソ

$$\mathrm{SH}:\mathrm{AB}=\mathrm{HP}:\mathrm{BP}$$

$$\mathrm{SH}=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{HP}}{\mathrm{BP}}=\frac{3\cdot\frac{3}{5}}{1}=\underline{\underline{\frac{9}{5}}}$$ ……タ，チ

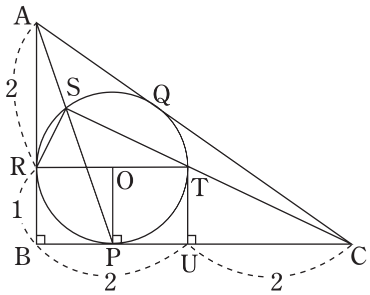
である。

したがって，

$$\tan\angle\mathrm{BCS}=\frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{CH}}=\frac{\mathrm{SH}}{\mathrm{CP}+\mathrm{HP}}=\frac{\frac{9}{5}}{3+\frac{3}{5}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}\quad\cdots\cdots①$$ ……ツ，テ

である。

(3)



点 T から辺 BC に垂線 TU を下ろすと，

$$\mathrm{RT}=\mathrm{BU}=2$$

であるから，

$$\mathrm{CU}=4-2=2$$

また，TU＝OP＝1 であるから，

$$\tan\angle\mathrm{BCT}=\tan\angle\mathrm{UCT}=\frac{\mathrm{TU}}{\mathrm{CU}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}\quad\cdots\cdots②$$ ……ト，ナ

である。

①，②より，

$$\angle\mathrm{BCS}=\angle\mathrm{BCT}$$

であるから，3 点 S，T，C は同一直線上にある。

よって，

$\angle\mathrm{RSC} = \angle\mathrm{RST} = \underline{\underline{90^\circ}}$ ……ニヌ

（半円弧 RT に対する円周角）

また，△PTR は直角二等辺三角形であるから，

$\angle\mathrm{PSC} = \angle\mathrm{PST} = \angle\mathrm{PRT} = \underline{\underline{45^\circ}}$ ……ネノ

（$\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$に対する円周角）

である。

第４問

異なる 11 個の玉から 5 個の玉を取り出す取り出し方は，

$${}_{11}\mathrm{C}_5 = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \underline{\underline{462}} \quad \text{（通り）}$$ ……**アイウ**

ある。

(1)　得点が 0 点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは，黒玉以外の赤玉 5 個，白玉 5 個から 4 個を選ぶ場合で，かつこの 4 個の番号がすべて異なる場合である。このとき，番号の選び方が ${}_5\mathrm{C}_4$ 通り，それぞれの番号に対し，赤，白 2 通りずつあるから，

$${}_5\mathrm{C}_4 \times 2^4 = \underline{\underline{80}} \quad \text{（通り）}\quad \cdots\cdots①$$ ……**エオ**

また，得点が 0 点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれていないのは，赤玉 5 個，白玉 5 個から 5 個を選ぶ場合で，かつこの 5 個の番号がすべて異なる場合である。このとき，番号の選び方が ${}_5\mathrm{C}_5$ 通り，それぞれの番号に対し，赤，白 2 通りずつあるから，

$${}_5\mathrm{C}_5 \times 2^5 = \underline{\underline{32}} \quad \text{（通り）}\quad \cdots\cdots②$$ ……**カキ**

得点が 1 点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれているのは，黒玉以外の赤玉 5 個，白玉 5 個から 4 個を選ぶ場合で，かつこのうちの 2 個 1 組が同じ番号で，残り 2 個の番号が異なる場合である。このとき，同じ番号になる 2 個 1 組の選び方が ${}_5\mathrm{C}_1$ 通り，残り 2 個の番号の選び方が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りで，この 2 個はそれぞれの番号に対し，赤，白 2 通りずつあるから

$${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times 2^2 = \underline{\underline{120}} \quad \text{（通り）}\quad \cdots\cdots③$$ ……**クケコ**

また，得点が 1 点となる取り出し方のうち，黒玉が含まれていないのは，赤玉 5 個，白玉 5 個から 5 個を選ぶ場合で，かつこのうちの 2 個 1 組が同じ番号で，残りの 3 個の番号が異なる場合である。このとき，同じ番号になる 2 個 1 組の選び方が ${}_5\mathrm{C}_1$ 通り，残り 3 個の番号の選び方が ${}_4\mathrm{C}_3$ 通りで，この 3 個はそれぞれの番号に対し，赤，白 2 通りずつあるから，

$${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_3 \times 2^3 = \underline{\underline{160}} \quad \text{（通り）}\quad \cdots\cdots④$$ ……**サシス**

(2)　得点が 1 点となる取り出し方は，③，④より

$$120 + 160 = 280 \quad \text{（通り）}$$

であるから，その確率は

$$\frac{280}{462} = \frac{20}{\underline{\underline{33}}}$$ ……**セソ，タチ**

である。

また，得点は 0 点，1 点，2 点のいずれかであり，0 点，1 点となる取り出し方は，①～④より

$$80 + 32 + 120 + 160 = 392 \quad \text{（通り）}$$

であるから，得点が 2 点となる取り出し方は

$$462 - 392 = 70 \quad \text{（通り）}$$

である。

よって，得点が 2 点となる確率は

$$\frac{70}{462}=\frac{5}{\underline{\underline{33}}}$$ ……ツ，テト

である。

したがって，求める得点の期待値は，

$$1\times\frac{20}{33}+2\times\frac{5}{33}=\frac{30}{33}=\frac{10}{\underline{\underline{11}}}$$ ……ナニ，ヌネ

である。